张图云 著

周易中的数学

ZHOUYI ZHONG DE SHUXUE

揲扐算法研究

SHELE SUANFA YANJIU

贵州科技出版社

目　录

前　言

出于兴趣和好奇，笔者曾对《周易》占筮方法中的一些数学问题做了探讨，先后写成几篇文稿。随着积累的资料渐多，便将这些零散的文稿整理集结在一起，于是形成了这本小书。

本书的内容源于《周易》占筮，但并不讨论占筮话题，既不涉及俗话中所说的“算命”，也不涉及时尚人士所说的“预测”。《周易》占筮术是一种古老的“数占”，即根据某种算法的计算结果对人事的吉凶进行占测，因而在这种独特的算法中蕴含了一些古代的数学信息，值得后人研究。本书便专门探讨《周易》占筮中出现于先秦时期的一些主要的数学问题，自然也会涉及中国古代数学史中与商周数学相关的部分内容。

时下研《易》的书籍很多，说明人们很是关注中华民族的传统文化。不过，这些书籍大都偏“文”，或者说多与哲学、历史、文字等学科以及传统文化有关，而少有偏“理”的作品，尤其缺少偏重于数学的专著，笔者所见仅有沈宜甲先生写的《科学无玄的周易》等不多的几种。另一方面，在研究中国古代数学史的书籍中，除1998年吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一卷》之外，详细论及《周易》中数学问题的著作也不多见。形成这种状况的原因是多方面的，长期以来未能用现代数学方法较全面地解读一般性的揲扐算法规律便是可能的原因之一。这里的“揲”(音shé)是按一定的规则用手点数并取出蓍草筹策，

而“扐”(音 lè)则是将揲余的蓍草或筹策夹于手指之间的操作。占筮时通常用蓍草的茎或竹签状的筹策做计算工具，由于具体计算的过程以“揲”、“扐”操作为特征，所以不妨将这种特殊的计算方法称为揲扐算法，简称揲算。《易》占揲算是西周占筮家们出于占筮的需要而发明的一种算法，用现代数学的语言来说，这是一则初等数论范畴内的特殊真命题。由于数学能力毕竟有限，古代占筮家们肯定不是通过建立一般性命题的途径才发明出这种特殊算法的。但对于我们来说，弄清这则命题的内容，找到揲算模式下一般性命题的描述方式，将有助于更全面地认识《周易》占筮，也有助于了解西周数学的发展和应用状况，因而应该是一件有意义的工作。

本书第 1 章对《周易》占筮及其文本作了简要的介绍，第 2 章讨论了与八卦和六十四卦有关的一些数学特点，而对《易》占成卦时所用的揲算方法予以说明，则是第 3 章的主要目的。

用现代数学方法归纳出一般性的揲算命题并予以证明，是本书的核心内容。笔者对这一课题的探讨文稿曾以《周易筮法模式下的揲扐计算通用公式》之名被《贵州教育学院学报》2006 年第 4 期刊用。以此为基础，本书第 4 章对相关命题的表述和证明作了一些更正和改进，形成了较为准确和完整的一套揲算理论。其中的定理 5 便是对《易》占揲算命题的一种数学描述：

参揲总策数 $S=(R+2C)M+K$ 时，可以按《周易》占筮的揲算模式进行分 2、挂 1、揲 M 的计算，经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R,R+1,\cdots\cdots,R+C\}$。其中 $(3-M)\leqslant K\leqslant 1$；$C=1$ 时，$M\geqslant 2$；$C>1$ 时，$M\geqslant 3$。

这样，除了分 2 和挂 1，与揲算相关的其他参数都用代数符号做了公式化的处理，因而具有一般性，这就为我们从数学的角度深入研究《易》占筮算创造了一定的条件。

笔者在文稿《周易揲扐算法结果数的出现概率及考古应用》(载《贵州教育学院学报》2007 年第 5 期)中计算了揲算结果数的出现概率,给出了《易》占情形下的四个概率指标。笔者将这一成果应用于考古学研究,为历代学者关于《左传》、《国语》中的《周易》占例采用了传世揲算和变卦规则的推测提供了一个来自数学领域的佐证。类似地,又用这些概率指标核验了近几十年来出土的三批战国竹简中的占筮记录,为这些占筮都是用《周易》行占的推测提供了佐证。本书第 5 章和第 6 章介绍了这方面的内容。

本书最后两章主要是中国古代数学史方面的一些探讨。在归纳建立了一般性揲算命题的基础上,通过对同类算法的对比研究,发现《易》占揲算竟然是所有同类算法中最能满足占筮要求的一种算法。由于资料的缺乏,长期以来,人们对揲算的发明过程无法展开研究,也无法对揲算的发明是一种“偶然的凑巧”的猜测孰对孰错做出判断。根据一般性揲算命题展开的比较全面的对比研究表明,揲算的发明是古代占筮家们在长期试算和实际应用中逐渐优选出的一种算法,不是某个圣人的偶然发明。揲算的定型集聚了西周占筮家们的数学智慧,它不但促成了中国传统的卜筮文化基本形态的形成,而且从一个侧面显示了西周数学发展及应用的状况。

甲骨文的发现使我们对商代的数学水平有了许多具体的了解,但是关于西周数学的状况我们仍然知之甚少。在中国古代数学史的已有记录中,西周时期,除了商代传袭下来的数学知识,由周人发展形成的数学成果并不多。虽然有的学者认为西周时期已出现了《周礼》“九数”所说的实用型的算法设计,但是由于举不出具体的例证而显得缺乏足够的说服力。另一方面,也许是因为缺乏对揲算的深入研究,一些学者将其视为“一个

四则运算的例子”,弱化了从数学的角度研究揲算的价值。按照这种处理方式,甚至可以认定其数学内涵超不过商代的水平,进而得出揲算在“数学发展史上已没有意义,现代一般的数学史著作不提及”的结论。本书不是将揲算拆解为简单的四则运算来看待,而是将其归纳为一则初等数论范畴内的算法命题,于是我们看到了一套有着严密的逻辑结构和程序设计的、没有数学瑕疵的专用算法。这套算法是目前惟一确知的保存得非常完整的西周数学实用例证,应当是西周数学的一项成果。揲算的存在使我们有理由认为西周时期的数学家们已有能力和条件创制出一些与生产实践相关的实用算法,而《周礼》“九数”中的部分内容正是由这些算法所构成。注意到《易》占揲算也是迄今所知中国最为古老的程序化的专用算法设计,根据本书的研究结果,可以明确地将算法设计的出现时期提早到西周时期,距今已有近2800年的历史,在中国古代数学史的研究中,如此珍贵的材料显然不应被忽视。

研究表明,揲算具有三条显著的数学特点:

1. 显示出程序化实用算法设计的数学思想,没有理论思辨;
2. 数学方法以经验归纳为主,缺乏演绎论证;
3. 依赖于筹策算具的手动型演算方式。

这些特点正与《九章算术》等古代算经框架下形成的中国传统数学的主要特征相容,从而揭示出中国传统数学与古老的揲算之间,有着悠久的渊源关联。中国传统数学曾经取得过许多成就,对华夏文化的形成和繁荣做出了重要的贡献。但由于缺乏积极的交流,人们对其思想、方法和工具等方面存在的局限性未能形成充分的认识,再加上社会及政治等方面的原因,自元末以后,中国传统数学便逐渐出现了衰微不振的局面。中国传统数学被现代数学所取代,是在专制统治和守旧思想被削弱和

摒弃的背景下，新一代数学家们通过广泛的交流与学习，融会了中外科学思想和先进方法的必然结果。

本书在数学归纳法原理的应用方面得到了贵州科学院应用数学研究室主任张明义研究员的悉心指导，在揲算结果数出现概率的计算方面采纳了好友罗永祥先生的建议，笔者深表感谢。

本书通过对《周易》占筮中部分数学问题的讨论，为更加全面地认识和了解《周易》提供了一个可能的视角，得出了一些结论、推测和看法。但是，应当说这都是一些尚还处于探讨性阶段的东西，有的内容还不甚成熟，有的推测还有待考古发现和进一步的理论研究予以证实或推定，因而其中定有谬误不确之处，希望得到大家的指正，也希望与有兴趣的读者进行交流和讨论。

张图云

2008 年 2 月

第1章 《周易》占筮及其文本

在讨论《周易》占筮中的数学问题之前，有必要对《周易》占筮及其文本的基本情况做简要的介绍。

1.1 《周易》是一种占筮方法

1.1.1 中国古代的占问术

使用占问之术预测吉凶或指导决策，是人类社会生活中一种极为普遍而古老的文化现象。在能力、知识和信息都相当有限的古代，面对变化莫测的自然界和纷繁复杂的社会关系，人们在遇事决策之前，往往由于无法估计或预知行动的后果，免不了会对结局的吉凶产生担忧或疑虑。在古人的心目中，冥冥深处也许存在着无所不知、无所不能的天地神明，这就很自然地产生出从神明那里获取指引或启示，以及向神明祈求保佑的心理需求。这样，在不同地域的古人族群中便出现了各种用来沟通人神、求取神示的占问方法。占问事宜多由族群中知识丰富或阅历较深的人实施，在涉及重大事项的决策时，族群首领往往亲自介入占问活动，因而是很严肃的事情。一旦获得了神示，人们将按神明的旨意行动，这在事实上起到了排除异议、统一意志的作用，必然有利于族群的团结与巩固。特别是在所得神示的确符合实际情况或顺应于自然规律时，对族群的发展壮大将起到积

极的作用。也许,这就是自古以来,占问诸术在不同地域的人类族群中都普遍受到重视的基本原因。另一方面,在多种占问方法并存的情况下,肯定是人为干预因素较少而且应验比率较高的方法更容易被人们认可。因而在随机条件下追求较高的应验率也是占问方法本身不断改进更新的原始动因。显然,当一种占法失去了信众们的崇奉,这种占法也就失去了存在的理由。随着生产力的提高及社会结构的演进,一些强大的族群发展成早期的国家。在这些国家中,怎样才能更加令人信服地获取神明的启示,仍然是一门非常重要的学问,其结果是形成了各种具有传统特色的占问文化。我们今天在不同民族和国家的传统文化中,大都能发现一些与占问有关的神秘文化内容,是很正常的现象。

在中国的传统文化中,曾经出现过多种向神明祈取启示的占问方法。《史记·龟策列传》就说:"蛮、夷、氐、羌虽无君臣之序,亦有决疑之卜。或以金石,或以草木,国不同俗。然皆可以战伐攻击,推兵求胜,各信其神,以知来事。"可见,用各种占问方法求取神示,在中国古代的社会生活中也是相当普遍的。根据学者们的研究,中国古代的占问之术虽然头绪很多,但大体上都有古老的起源,经历了各自的发展过程,在一些并行使用的方法中,有的还保留着相互影响的痕迹。按照这些占问方法赖以建立的依据和形态特征,大致可以将它们区分为下述四种类型:

第一种类型以占星为代表。占星术将天象联系于人事,依据日月星辰在位置关系、运行特征、色彩形状等方面的变化,以及特异天象的生灭,进行人事吉凶的预测。在占式等派生的占法中,季节气候、地理方位等地学因素与星象历算、时辰日期等天学因素都被用于占测。这类与天地观念直接相关的占问方法对古代社会的生产和生活秩序影响极大,历代统治者都非常重

视，尤其是对占星术的控制最为严格。为了巩固王权，防止民间私测谎报引起的人心扰动，大约从西晋开始，唐、宋、元、明诸朝都颁有禁令，严禁民间私学天文历算和占星之术。例如，《晋书·武帝纪》有："禁星气、谶纬之学。"（泰始三年，即公元267年）又如《续资治通鉴长编·卷十八》中就有"诸道所送知天文相术等人凡三百五十有一，十二月丁巳朔，诏以六十有八人隶司天台，余悉黥面流海岛"的记载，（太平兴国二年，即公元977年）等等。这样一来，占星术在各个朝代都由官方控制，在民间则少有流传及应用[1]。可能由于占式术分成六壬、遁甲、太乙等若干分枝占法，并无统一形式，它们虽有古老来源，但影响较为分散，基本上属于民间杂占，官方一般不予禁止。

第二种类型以占卜为代表。占卜术的产生可能与古人对烧灼骨片时所生裂纹的观察有关。由于占卜时须使用动物身上的甲骨材料，因而学者们认为这是一种古人对"动物之灵"的神秘崇拜[2]。占卜术在殷商时期最为兴盛。通常使用的卜材是乌龟的腹甲和牛羊的肩胛骨。占卜前要先在经过磨削整治的甲骨片材上钻凿凹形槽孔，占卜时用火炙灼槽孔部位，甲骨因受热不均，槽孔部位会出现裂纹。很可能因为甲骨拆裂时常发出"噗"声，所以这种占法被叫做"卜"。甲骨上出现的裂纹称为"兆"，每次占卜所得兆象各有不同，古人通过长期的观察与总结，将这些兆象归纳为若干不同的类型，认为它们代表着相应的神明的旨意，因而可以用来预测所要贞问之事的吉凶。卜者常将与占卜有关的事情用当时的文字契刻在甲骨上，这就是著名的甲骨卜辞或甲骨文。近百年来，在殷墟及周原等地出土了商周时期的卜甲卜骨达十多万片，发现了五千多个不同的字符。目前已辨识出其中的一千多字，基本上可以用来解读甲骨上记载的事情，使我们对中国古代的文化有了更为确切的了解。

第三种类型以占梦为代表。人在睡眠状态下往往会做梦，梦境的情形与梦者的经历、情绪、健康状态等可能都有关系，涉及人的心理、生理、精神、意识以及生存环境等方面十分复杂的问题。古人将梦中所见与鬼神、灵魂等联系在一起，认为可以用来预测人事的吉凶，便形成了占梦术。占梦术与其他诸如摸骨看相之类同人体有关的占问之术，通常都被视为杂占，在民间有着广泛的流传。

第四种类型以占筮为代表。占筮起源于古人对数的神秘崇拜，因而也称之为数占。古人认为，在某些随机条件下的所得之数可以预测人事吉凶。例如从一堆石子或竹签中任意抽取一些出来进行点数，将得数的单双或奇偶作为判断吉凶的依据，就是一种数占，而且很可能是比较原始的数占。在《周易》类的占筮方法中，用于占筮的工具称为“策”，是一些用竹材制成的竹签，由于与称为“筹”的古代计算工具同源，因而有“筹策”之称。古人也常用蓍草的茎做策，因而古书中言及蓍时一般都与占筮相关。古代有一种职业叫做“巫”，除了跳神驱邪、采药行医之外，一些巫还长于占筮。所以，关于“筮”字，《说文解字》的解释是：“筮，《易》卦用蓍也。从竹，从巫。”说占筮是对“植物之灵”的崇拜，只是从占筮算具的用材多取自植物的观察得出的看法，更本质的认识应与古人惊奇于某些数算规律时所产生的神秘崇拜有关。古代的占筮方法很多，也衍生出许多与数相关的杂占。在这些占问方法中，《周易》是流传最广的一种。《周易》占法的早期情况目前尚不清楚，但它肯定有着极为古老的起源。一般认为，传世的《周易》占法定型于西周时期，传续至今已有将近三千年的历史，是各种占问方法中最为稳定、对中国传统文化的影响也最大的一种。

1.1.2 《周易》是一种占筮方法

占筮起源于人们对数的神秘崇拜,但不同的族群在不同的历史时期所使用的占筮方法通常并不相同。在商代,人们所用的占问方法虽以占卜为主,但也使用占筮。从出土的商代筮数记录来看,商人所用的占筮方法与《周易》占法并不相同。一般认为《周易》是周人在西周时期发明的占筮方法,应当是在周人早期占法的基础上改进完善的结果。但是周人的早期占筮与商人的占筮有什么联系,则是尚待考证的问题。

根据出土的西周甲骨文物和传世文献中的相关记载,可知周人在沿用商代占卜术的同时,占筮术也相当兴盛。卜、筮并用成了两周时期占问文化的一大特点。《尚书·君奭》所说:"故一人有事于四方,若卜筮,罔不是孚。"就用四方百姓对卜和筮的绝对崇信来比喻人们对君王举措的响应。《诗经》中"尔卜尔筮"(《卫风·氓》)、"卜筮偕止"(《小雅·杕杜》)等等,都是卜、筮并用的写照。当时流行的占筮方法有好几种,《周易》便是其中最受重视的方法之一。从此以后,用《周易》作占,在中国历史上便从未间断,一直传续至今,而且在汉代和宋代还出现过两次以《周易》占筮及经传文本为核心的易学研究高潮。《周易》占筮以其内涵的丰富哲理,对中国传统文化的形成有着一定的影响。

《左传·僖公十五年》有"龟,象也;筮,数也"的说法,指出卜之所依是甲骨上的灼裂兆象,是实在的物象,而筮之所依则是抽象的数。当然,这里的"数"应不止"计数"的意思,还有按某种规则进行"数算"的含义,但本质上是神秘文化意义上的"数"。

《礼记·曲礼上》则关注于卜筮之术的政治功能:"龟为卜,

筴(策)为筮。卜筮者,先圣王之所以使民信时日、敬鬼神、畏法令也;所以使民决嫌疑、定犹与(豫)也。故曰:疑而筮之,则弗非也;日而行事,则必践之。"可见,用卜筮之法探求神意,是解除疑虑,协调行动,统一意志的有效方式。所以先圣王要求人们不但不要怀疑卜筮的结果,而且必须按期践行。正是由于古代帝王们注意到卜筮占问之术在社会生活中有着重要的作用,所以对一些重要的占问术实施了严格的管理。汉晋以后,历代都对占星术严加控制,不许流传于民间,就是典型的例证。从目前所知的情况来看,商周时期,王室政府就对各种占问术设立了管理部门,配备了相关的职官人员,其中,就有专门管理占筮的人员。

《吕氏春秋·审分览·勿躬》说"巫咸作筮",而《尚书·君奭》有"在太戊时,巫咸乂王家"的记载。将它们联系起来,大致可知商王太戊时,由辅臣巫咸管理并施行占筮。当然,由于缺乏资料,商代的占筮叫什么名称,按怎样的规则行占,至今仍不清楚。到了西周时期,随着周人所用占筮术的完善,占筮的地位逐步提高,官方对占筮事务的管理也有了明显的加强,由殷周之际的"择建立卜筮人"(《尚书·洪范》),发展成《周礼·春官宗伯》中所说的由"大卜"、"筮人"等组成的一套机构。这个机构的任务从"上春相(选择和采集)筮(蓍草),凡国事共(供给)筮"开始,即从春正月时要选藏蓍草,到了占筮国事时要保证蓍草的供应开始,到"掌三《易》,以辨吉凶",即用《连山》、《归藏》、《周易》这三种统称为《易》的占筮方法占问吉凶,最后还要"凡卜筮既事,则系币以比其命。岁终,则计其占之中否",即卜筮完毕,要将所得的命辞结果收藏起来,到了年终则对应验情况进行统计。可见,周王室对卜筮的管理是严格而有序的。

前面所说西周时期并行使用的三种《易》占见于《周礼·大

卜》:“大卜……掌三《易》之法:一曰《连山》,二曰《归藏》,三曰《周易》。其经卦皆八,其别皆六十有四。”可知这三种《易》占使用的八卦和六十四卦的卦象符号都是相同的,可以估计成卦时所用的筮算方法也应该相同。一般认为这三种《易》占的差异主要是释占方法和繇辞文本各有不同。1993年,江陵王家台秦墓出土了一批竹简,其中有一种被考定为《归藏》的文本,属于战国末期的文物,表明当时确实存在《归藏》占法,因而《周礼》所载,是有参考价值的[3]。到了西周时期,通过筮算得到卦象,再配合繇辞文本释占的《易》占,已成占筮方法中的主流,其他占筮方法则逐渐被淘汰而不传。由于《连》、《归》二《易》大约在汉晋时期先后失传,所以今人对它们的了解甚少,但仍可估计三《易》中,《周易》是较为主要的占法。这样,虽然有时《易》有泛指三《易》的意思,但是在有些场合,《易》就是《周易》的简称,一般不会发生混淆或误解。

关于《周易》中的“周”字历来有两种解释。一是汉代成书的《易纬》所说的“因代以名周”,认为“周”是朝代的名称。这就界定了《周易》是周代的事物,或者说,是周人使用的占筮方法,与其他的占筮方法是有所区别的。后来的学者们,如唐代的孔颖达,宋代的程颐和朱熹等人,多采用此说,是比较流行的一种解释。二是《易传·系辞上》有“周乎万物,道济天下”的语句,虽然并未明确指出这就是《周易》中“周”字的出处,但东汉学者郑玄亦释“周”为“周普”,是周全,普遍的意思,强调了《周易》之道能够涵盖万物的普适性,后世也有不少赞同此说的学者。关于“易”字的解释相对要多一些,例如《说文解字》认为:“易,蜥易,蝘蜓,守宫也。象形。秘书(《参同契》)说:‘日月为易’,象阴阳也。”是说“易”字或是象形于蜥蜴,或是取义于日月所代表的阴阳概念。汉代《周易乾凿度》则认为:“易,一名而含三义:

所谓简易也，变易也，不易也。"但是最为贴切的解释出自《易传·系辞上》，书中说"生生之谓易"，强调的是万物生化，变易无穷。唐初学者孔颖达在《周易正义·序》中也认为"易"是"变化之总名，改换之殊称"。这样，作为占法名称，似乎可以将"周易"解释为周人使用的，以变易为特征，其道理可以涵盖万物的一种占筮方法。

用传世的《周易》占筮法求占时，主要有以下三个环节：首先是揲（音 shé）算起卦，其次是因卦索辞，最后是依卦象和辞文释占。此外，为了表达筮者对天地神祇的虔诚和敬畏，占筮过程一般要遵循一套专门的仪式，宋代学者朱熹在《周易本义》中专门有《筮仪》一文，对此做了详细的介绍。

所谓"揲算"，是"揲扐（音 lè）算法"的简称，在《易》占筮算中，由于以"揲"和"扐"两种操作为特征，故称之为揲扐计算[4]。由于早期的占筮方法及相关规则主要依靠师传口授的方式代代相传，并不专门录成文本，因而后人对秦汉以前的《周易》占法并无确切的认识，只能从各种古代文献的零散记载和出土文物的相关信息中获得大致的了解。从目前已掌握的情况来看，揲算起卦的方法相当稳定。虽然这种算法的相关记录最早见于战国时期成书的《易传·系辞上》，但可推测这种算法定型的时期不会晚于西周晚期。可以说揲算自从在西周时期定型以后，至今没有任何变化，一直保持着固定的算法形态。揲算为什么能有这样好的稳定性，是本书将要研究的问题之一。就占筮来说，揲算的特点是在分拆筹策时具有随机性，因而每轮揲算得到的结果数可能相同，也可能不同，由这些结果数确定的爻符可能是阳爻，也可能是阴爻，这就是《易传·系辞上》所说的"极数知来之谓占，通变之谓事，阴阳不测之谓神"。

相比之下，因卦索辞的规则却不是很明确。宋代学者朱熹

通过对《左传》筮例的研究,曾对变卦索辞的办法做过归纳总结,但仍不能据以确定就是西周和春秋战国时期使用的索辞规则。

至于依卦象和辞文对求占问题所做的解释,灵活变通的处理方式则几成惯例,不论从《左传》、《国语》筮例,还是从形成于春秋战国时期的多种解《易》传文,均很难归纳出确切的释占规则。一般而论,这种释卦时既有卦象和辞文作依据,又存在想象空间和变通可能的状况,使得释占时往往带有浓厚的释占者的个人特色,因而古书中记录的许多筮例,大都与有名的占筮家有关。有学者认为,这正是《周易》占法的诱人之处。

1.2 《周易》是一部占筮用书

用《周易》进行占筮时,完成揲算起卦之后,接着有因卦索辞和按卦象繇(音 zhòu)辞释占的环节,这些环节的落实,依赖于一本记录了卦象和繇辞的书籍。这部书的名称也叫《周易》。一般认为《周易》一书形成于西周时期,有着古老的来源,作为释占的基本依据,在《周易》占法广为流传后,成为一部被尊为经典的占筮用书。从原本的功能来看,《周易》古经是一部服务于《周易》占法的专用书籍,所载卦象和繇辞经文都是用来释占的。由于《周易》占法历来采取师传口授的方式传承,《周易》古经是关键的师授之物,因而所用经书与占筮方法同名是很自然的事情。类似的情形还见于《连山》和《归藏》占法,与这两种占法相关的卦象及繇辞文本也叫做《连山》和《归藏》。

现在所见《周易》一书的内容,已超出了《周易》古经的范围,除了包含卦象和繇辞经文之外,还增加了阐释卦象和经文的传文。这种将卦象、经文和传文合编为一书的做法,始于汉代易学家王弼,目的是便于观览使用。为了将今本《周易》同《周易》

古经区别开来，习惯上将由卦象和繇辞经文构成的《周易》古经称为《易经》，而将传文称为《易传》。这样，《周易》一名就有了三种含义：一是指《周易》占筮的方法；二是指《周易》古经的书名，也就是《易经》；三是指今本《周易》，即《易经》和《易传》的合编文本。具体使用时，只要稍加留意，一般不会混淆。

汉武帝独尊儒术，尊《易》、《诗》、《书》、《礼》、《春秋》为五经，"置五经博士"(《汉书·武帝纪》)。为了便于研读《易经》，汉代易学家们收集编纂了一本文集，称为《易传》。《易传》中共有传文七种十篇，它们是《彖传》(上、下)、《象传》(上、下)、《系辞传》(上、下)、《文言传》、《说卦传》、《序卦传》和《杂卦传》，有"十翼"之称，是阐释《易经》的辅翼之作。《史记·孔子世家》说："孔子晚而喜《易》，序《彖》、《系》、《象》、《说卦》、《文言》。"因而传统易学认为十翼为孔子所作。在今本《周易》中，《彖》、《象》、《文言》诸传被拆散编入经文之内，《系辞》、《说卦》、《序卦》和《杂卦》则单独成篇附于经文之后。传文的基本功能是阐释经文，但在占筮活动中，《易传》通常也是释占的依据。

《易经》的卦象是何人所创？经文是何人所作？它们是怎样形成的？是各种研究或介绍《周易》的书籍中常见的问题。尽管存在各种各样的研究结果，但由于证据有限，目前还难以得出一致的结论。

传统易学认为："《易》道深矣，人更三圣，世历三古。"(《汉书·艺文志》)其中"三圣"是指创制八卦的伏羲、演成六十四卦的周文王和作十翼的孔子。"三古"则是指这三个圣人所在的历史时期。《易传·系辞下》云："古者包牺(伏羲)氏之王天下也，仰则观象于天，俯则观法于地，观鸟兽之文，与地之宜，近取诸身，远取诸物，于是始作八卦，以通神明之德，以类万物之情。"一般将使用卦象的占筮类型称为《易》占，根据这一说法，

《易》占应是伏羲的发明，由于属于上古之事，其占法自然就简单一些，虽然只涉及八种卦象，但已足以通神明类万物了。《易传·系辞下》又云："《易》之兴也，其于中古乎？作《易》者，其有忧患乎？"还说："《易》之兴也，当其殷之末世，周之盛德邪？当文王与纣之事邪？是故其辞危。"司马迁说："昔西伯（周文王）拘羑里，演《周易》。"（《史记·太史公自序》）又说："其（周文王）囚羑里；盖益《易》之八卦为六十四卦。"（《史记·周本纪》）大概是依据这类记载，传统易学认为《周易》占法起于殷周之际，是周文王被商纣王囚拘于羑里的中古时期，在伏羲八卦《易》占的基础上演绎形成的，所以经文的言辞语境中显示出周文王的忧患之情和历经危难的体验。

自清代开始，与传统易学不同的看法逐渐出现，例如清末皮锡瑞就认为《易经》的成书不在西周，而在春秋时期[5]。在各种疑古之作中，学者们提出了《易经》成书于周初（顾颉刚：《周易卦爻辞中的故事》）、周末（李镜池：《周易筮辞续考》）、战国（郭沫若：《周易的构成时代》）等各种不同的意见。目前，不少学者倾向于认为《易经》中的经文形成于西周早期或中期。由于卦象的定型时期尚待考定，因而并不笼统地讨论《易经》的成书情况。例如李学勤先生的结论是："《周易》经文所见人物及其事迹，确实都是很古老的。经文的形成很可能在周初，不会晚于西周中叶。顾颉刚先生的观点，看来是可信的。"[6]李先生的研究限于《易经》中的经文，而不涉及《易经》中的卦象，所以不能因此得出《易经》的成书也"不会晚于西周中叶"的推论。杨庆中先生在《周易经传研究》一书中综述了学者们的研究成果，得出"《易经》的成书，当在西周初年"[7]的结论。不过，由于相关的研究内容基本上未涉及六十四卦形成时期的问题，所以上述结论实际上也只适用于《易经》中的经文部分。

如果认为《周易》占法形成于西周，就意味着揲算起卦方法和六十四卦的定型时期以及繇辞经文的编定时期都不迟于西周晚期。从目前已知的情况看，学者们的研究主要在经文方面，由于相关材料的缺乏，因而对算法和卦象的研究还显得十分薄弱，还不能得出《易经》成书于西周初年的结论。有鉴于此，本书将通过对揲算数学规律及揲算定型时期的讨论，为《周易》占法的定型时期不迟于西周晚期的判断提供一个佐证。

《易经》一书的性质虽是占筮用书，但历代学者中多有视之为哲学书或历史书的人。这是因为《易经》中不但包含了丰富的古代哲学思想，而且具有以史说《易》的想象空间和相应的论证依据。孔子老而喜《易》，他喜的不是占筮，而是"观其德义"和注意书中的"古之遗言"（语见马王堆帛书《要》）。孔子从哲理和历史的角度研读《周易》古经的做法，对中国传统经学有着直接的影响。近现代的学者们更是从全新的视角去探讨《易经》中的哲学思想和历史文化内涵，取得了许多研究成果，使我们对华夏文明的形成有了更深刻的认识。

关于《易传》的成书时期，一般可以笼统地认为是在战国。但十翼各篇的成文有先有后，而且学者们对每一篇写成于何时还存在不同看法，所以在更为具体的层面上，目前还没有形成一致的意见。《系辞传》是《易传》中比较重要的传文，对其成书的年代，学者们的分歧较大，大致有春秋晚期孔子所作（金景芳：《周易的两个问题》）、战国前期（高亨：《周易大传今注》）、战国中期（张岱年：《论易大传的著作年代与哲学思想》）、战国末期（朱伯崑：《易学哲学史》）、西汉初期（李镜池：《周易探源》）等数种看法。尽管如此，在一般性的场合，通常可以笼统地说《系辞传》是战国时期的作品。

1.3 《周易》占筮的流传

在流传至今的先秦古籍中，与《诗经》、《尚书》等书相比，《易经》的传承显得最为顺利。其实，在讨论《易经》一书传承情况的时候，不能忘记它是《周易》占法流传承续的结果。如果《周易》占法在秦汉时期被淘汰或被禁止使用，《易经》这部书就不可能传承得这样完整，甚至很可能会失传。

在周人的族群内部，人们所用的占筮方法不会是一成不变的。在不同的历史时期，周人使用的占筮方法应经历了由简单到复杂、由粗糙到完善的过程。尤其是《周易》占法中的揲算方法、卦象系统和繇辞文本，肯定经历了一段逐步完善的过程，最终才形成传世的比较成熟且稳定的形态。在西周时期，《周易》主要服务于王室贵族，参与占问的人员应是当时最有名的占筮家，使用最好的占材筮具，采用的仪式规格也最高。虽然统治者们对这种占法的推崇必然会引起民间的效法，但最完善的筮法及仪式并无广泛流传的条件，因而民间的占筮活动无论从哪个方面来说，都是不能比拟的。可以推测，《易经》一书在西周时期的使用范围只局限于王室。或者说，正是西周王室对这种最为重要的占筮法有着严格的控制，《周易》占法和它所使用的《易经》文本并没有广泛的流传。西周末年周室衰微，礼崩乐坏，王室对卜筮事宜的控制逐渐松弛。到了春秋时期，过去专门服务于王室贵族的卜筮人员逐渐流散于各诸侯国，使《周易》占筮得到了广泛的传播。古代文献中使用《周易》作占的筮例最早见于《左传·庄公二十二年》的记载，其文云："周史有以《周易》见陈侯者，陈侯使筮之。"根据《史记·陈杞世家》的记录，这次占筮发生于陈厉公二年，即公元前705年，是一位来自周王室的史官为陈厉公所作。这个占筮家携带了周王室使用的《周

易》古经文本，跑去见陈国的诸侯，并为他作占，也许只是为了求生的缘故，其结果却是有效地促进了《周易》占法以及《易经》这部书的流传。从此以后，在春秋时期的大多数诸侯国中都陆续出现了用《周易》作占的事件，《左传》和《国语》中涉及占筮的记录便多达十国二十余条，其中大多数与《周易》有关。这些记录为后人研究两周占筮提供了非常宝贵的资料。

历史上最为著名的传《易》者当是孔子。《史记·孔子世家》云："孔子晚而喜《易》，序《彖》、《系》、《象》、《说卦》、《文言》。读《易》韦编三绝。曰：假我数年，若是，我于《易》则彬彬矣。"所谓"彬彬"，是全面和充实的意思，强调了于占筮之外，孔子对《周易》还有更为全面和深刻的认识。1973 年，长沙马王堆汉墓出土一批帛书，其中的《要》篇属于《易传》佚文。《要》云："夫子（孔子）老而好《易》，居则在席，行则在橐。"印证了《史记》"孔子晚而喜《易》"，"读《易》韦编三绝"的记载。显然，要全面了解《周易》古经，不熟知具体的占筮方法是不行的。从《要》中"子曰：吾百占而七十当"的说法，可知孔子用《周易》作占大概有百分之七十的命中率，这是孔子不惟研读《易》文，还熟知《易》占的证明。按《史记·仲尼弟子列传》和《汉书·艺文志》的记载，汉代的《周易》占筮为孔子所传，从"孔子传《易》于瞿（商瞿，鲁人）"开始，经过子弘（楚人）、肩疵（江东人）、家竖（燕人）、乘羽（淳于人）、庄何（齐人）、中同（东武人），到杨何（菑川人），历八传三百余年至于西汉。其中的商瞿应当不是孔门儒学高徒。所以一些学者提出这样的疑问："若说孔子晚而喜《易》，何不传其门下高弟，而独传一藉藉无名之商瞿？"[8] 这个与《周易》占法的传承有关的问题，也许可以从秦始皇焚书坑儒的历史事件中找到答案。

《史记·秦始皇本纪》载有丞相李斯上书秦始皇：

> 今皇帝并有天下,别黑白而定一尊。私学而相与非法教,人闻令下,则各以其学议之,入则心非,出则巷议,夸主以为名,异取以为高,率群下以造谤。如此弗禁,则主势降乎上,党与成乎下,禁之便。臣请史官非秦记皆烧之,非博士官所职,天下敢有藏《诗》、《书》者弃市,以古非今者族,吏见知不举者与同罪。令下三十日不烧,黥为城旦。所不去者,医药、卜筮、种树之书。

秦始皇批准了李斯的建议,这就是发生于秦始皇三十四年(公元前213年)的焚书坑儒事件。在这次事件中,儒道诸学的典籍被焚烧,传人被坑杀,繁荣于春秋战国时期的古代文化遭遇了亘古未见的一次浩劫。秦始皇应是出于对鬼神的敬畏,以及出于政治上的需要等原因而不禁卜筮之术,不烧卜筮之书,才使《周易》占法和这种占法所用的《易经》文本躲过了这场劫难[9]。《汉书·儒林传》就说:"及秦禁学,《易》为卜筮之书,独不禁,故传受者不绝也。"

然而孔子敬鬼神而远之,他之喜《易》"非安其用",即不在于占筮之用。孔子关注的是经文中的圣人教诲和天地哲理,认为《周易》古经中"有古之遗言",并说:"《易》,我后其祝卜矣,我观其德义耳也。"(以上诸语见马王堆帛书《要》)可见孔子虽传用《周易》求占的具体方法,但他所传之《易》更讲究占筮之外的研讨。孔子的各代儒学高徒在传授《周易》的时候,除了传授占筮之法,也必然特别重视其中的儒学内容。进入秦代,这些以儒学为主的传《易》弟子难免因为"偶语《诗》、《书》"和"以古非今"的罪名而罹难,势必不能逃脱焚坑之劫,结果他们所传之《易》也就从此中断。按《汉书·艺文志》的说法,自战国至秦,"《易》有数家之传",可是《史记》、《汉书》所载,将《易》传续到西汉时期的,仅存商瞿一系。究其原因,很可能商瞿一系的弟子

多出自楚、江东、燕等当时比较边鄙的地区，而且他们见长于占筮，算不上儒学传人，到了秦代，因此得免于坑杀。商瞿一系的弟子们在传授《周易》占筮的同时，也将《易经》一书完整地传续下来了。

传文的传承可能就没有这样顺当了。传文的内容以孔子及其弟子们对经文的理解和阐释为主，同时也融入了不少其他流派的认识，于占筮之外，明显地涉及哲学观念、社会伦理、修身治国、阴阳五行、古圣人的教诲等儒道诸学的内容，多为李斯主张予以禁绝的“私学”，很可能难逃秦火。例如李学勤先生就认为：“《周易》经文是卜筮之书，而《易传》十翼则是儒学著作，自应属于禁绝的范围。”在研究长沙马王堆汉墓出土的帛书《系辞传》时，李先生说：“其构成其实是和今传本基本一致的，不过有一部分脱失，一部分又散入他篇，于是成了帛书的面貌。这种现象是怎么造成的呢？最可能的原因就是秦火。”[10] 1973年，长沙马王堆汉墓出土了六篇帛书传文，除了《系辞传》之外，其余《易之义》、《二三子问》、《要》、《缪和》、《昭力》五篇都是失佚的传文[11]。一般认为秦汉时期与《周易》有关的传文应有多种，汉代易学家们收集成编的十翼只是其中的一部分，这一部分传文随《周易》经文得到了顺利的传承，而其他传文则由于种种原因而多有失传。

注释：

[1]江晓原、钮卫星：《中国天学史》，上海人民出版社2005年8月版，第250～252页。

[2]李零：《中国方术考》，东方出版社2001年8月版，第88页。

[3]荆州地区博物馆：《江陵王家台十五号秦墓》，《文物》1995(1)。

[4]揲，按一定的规则点数筹策。扐，将揲剩的筹策归拢并夹于手指

间的操作。

[5]皮锡瑞:《经学通论》,中华书局1954年版,第9页。
[6]李学勤:《周易溯源》,巴蜀书社2006年1月版,第18页。
[7]杨庆中:《周易经传研究》,商务印书馆2005年11月版,第86~107页。
[8]杨庆中:《周易经传研究》,商务印书馆2005年11月版,第155页。
[9]张涛:《秦汉易学思想研究》,中华书局2005年3月版,第23~43页。
[10]李学勤:《周易溯源》,巴蜀书社2006年1月版,第325页。
[11]湖南省博物馆:《长沙马王堆二、三号汉墓》,文物出版社2004年7月版。

第2章 《周易》占筮中的卦象

作为揲算结果数的符号化记录，八卦和六十四卦是《周易》占筮特有的卦象符号系统。卦象的构成规律、卦象形成过程的推测和卦象的数学特点是本章将要介绍的主要内容。

2.1 卦象的构成

2.1.1 八卦和六十四卦

卦象是揲算结果数的符号化记录，是《易》占特有的一套符号系统。传世的卦象有八卦和六十四卦两种类型，它们都由称为“爻”（音 yáo）的基本符号构成。爻符共有两种，画做“——”的爻符称为阳爻，画做“－－”的爻符称为阴爻。爻符既不是文字，也不是数字，它是《易》占专用的符号。

在可重复使用爻符的条件下如果将3个爻符竖向排列起来，一共有8种不同的排法，这样得到的卦象序列称为八卦。八卦的8种卦象和古代占筮家们为它们所取的名称如下：

☰乾、☷坤、☳震、☴巽、☵坎、☲离、☶艮、☱兑

类似地，若用6个爻符竖向排在一起，一共有64种不同的排法，这样得到的卦象序列称为六十四卦。显然，采用将八卦两两相重的办法，也可以得到所有可能出现的64种不同的卦象。

按今本《周易》的顺序，六十四卦的卦象和名称如下：

䷀乾、䷁坤、䷂屯、䷃蒙、䷄需、䷅讼、䷆师、䷇比、
䷈小畜、䷉履、䷊泰、䷋否、䷌同人、䷍大有、䷎谦、䷏豫、
䷐随、䷑蛊、䷒临、䷓观、䷔噬嗑、䷕贲、䷖剥、䷗复、
䷘无妄、䷙大畜、䷚颐、䷛大过、䷜坎、䷝离、䷞咸、䷟恒、
䷠遁、䷡大壮、䷢晋、䷣明夷、䷤家人、䷥睽、䷦蹇、䷧解、
䷨损、䷩益、䷪夬、䷫姤、䷬萃、䷭升、䷮困、䷯井、
䷰革、䷱鼎、䷲震、䷳艮、䷴渐、䷵归妹、䷶丰、䷷旅、
䷸巽、䷹兑、䷺涣、䷻节、䷼中孚、䷽小过、䷾既济、䷿未济。

六十四卦中，每一个卦象都由6个爻符构成，为确定爻符的位置和阴阳属性，有“爻题”的设置。在每一个卦象中，爻题的编排顺序都是从下至上，因而爻符的位置题名从下至上依次为“初”、“二”、“三”、“四”、“五”、“上”。爻符的阴阳属性题名的取法规则是阴爻为“六”，阳爻为“九”。下面以《乾》、《坤》、《既济》、《未济》四卦为例，说明《周易》占法中爻题的传统记法：

《乾》：	《坤》：	《既济》：	《未济》：
上九——	上六— —	上六— —	上九——
九五——	六五— —	九五——	六五— —
九四——	六四— —	六四— —	九四——
九三——	六三— —	九三——	六三— —
九二——	六二— —	六二— —	九二——
初九——	初六— —	初九——	初六— —

有了卦名和爻题，就可以准确无误地界定任何一个爻符的位置和阴阳属性，形成一套严格有序的编码索引系统。例如“《既济》卦九五爻”便是《既济》卦的卦象中从下向上数的第5个爻符，这个爻符是阳爻。

由于六十四卦可以用八卦两两相重而得，故习惯上又将六十四卦的卦象用两个相关八卦的卦名来描述。例如《乾》卦的下卦是《乾》，上卦也是《乾》，故描述为“《乾》下，《乾》上”。又

如《既济》卦的下卦是《离》，上卦是《坎》，故描述为“《离》下，《坎》上”。通常下卦又称为“内卦”或“贞卦”，上卦又称为“外卦”或“悔卦”。

说卦象和爻符构成了一套编码索引系统，是因为《易经》中列写了释占繇辞共计 450 条，为便于查取，它们得有一个目录。这些繇辞中的卦辞共有 64 条，对应于 64 种卦象，每卦配置 1 条。爻辞共有 384 条，对应于 $6 \times 64 = 384$ 个爻符，每个爻符配置 1 条。《乾》、《坤》两卦比较特殊，于卦爻辞之外，每卦另配一条“用辞”，分别称为“用九”和“用六”。所以一共有 $64 + 384 + 2 = 450$ 条繇辞。占筮时，有一套由揲算得出卦象，以及确定用这个卦象中的某个爻符作占的规则，这样便可检索出对应的繇辞。释占时，所涉卦象、爻符和繇辞一般都是解释神意的基本依据。

2.1.2 卦象的象征意义

通常情况下，释占时需要预先知道各种卦象所代表的象征意义。《易传》中有不少相关的说明，其中以《说卦》对八卦中 8 种卦象的象征意义的界定最为基本：“《乾》为天”、“《坤》为地”、“《震》为雷”、“《巽》为风”、“《坎》为水”、“《离》为火”、“《艮》为山”、“《兑》为泽。”不难看出，这种取象意义的起源可能十分古老。在古人对自然环境和生存条件的基本认识中，天地最为广大，水火均不可或缺。而天与风，地与山，水与泽，火与雷之间又互有联系，在古代极为直观和朴素的条件下，将这些因素作为八卦的象征意义是很自然的事情。以此为基础，后来又衍生出更多的象征意义，例如《易传 · 说卦》云：“《乾》为天、为圆、为君、为父、为王、为金、为寒、为冰、为大赤、为良马、为老马、为瘠马、为驳马、为木果。”等等。这样，释卦时就有了较大的分

类或比附空间，以适用于各种不同求占问题的解答。

一般认为，六十四卦是在八卦的基础上发展而成，因而六十四卦的卦象含义有不少是八卦卦象含义的引申。例如《既济》的卦象是《离》下《坎》上，《易传·象》就说："水在火上，既济。"这是因为在八卦中，《离》为火，《坎》为水，烧水做饭或者以水灭火时均为水在火上，是很正常的现象，因而占得《既济》卦时，多有吉利之辞。反之，《未济》的卦象是《坎》下《离》上，因而《易传·象》说："火在水上，未济。"由于水烧不热，或者火灭不熄，象征着办事不顺利，所以占得此卦时多有悔吝不吉之辞。当然，《易》占特别讲究变易，如何引申卦象含义以用于释占并不像上例这样简单，而是易学研究中的专门内容。此外，爻符在卦象中的位置和阴阳属性都有独特的象征意义，通过它们怎样去判断所占之事的吉凶悔吝，也有各种易学说法，一般难于做出简略的概括。总之，依照揲算得到的卦象和爻符以及对应的繇辞进行释占时，存在一些传统的规则或做法，同时也有一定的灵活变通空间，不可一概而论。事实上，从汉晋时代起，就逐步形成了象数派和义理派等各种易学流派，对怎样释卦，从来都没有形成过统一的明确规定。由于本书并不讨论易学理论或释占方法，故不再做详细的介绍，有兴趣的读者可以参阅其他相关的书籍。

2.2 卦象形成过程的推测

2.2.1 《熹平石经》中的卦象

目前所知，与传世六十四卦的卦象完全一致的考古发现，以东汉末《熹平石经·周易》残片上的石刻卦象为最早。根据《后汉书·蔡邕列传》的记载：

> 邕以经籍去圣久远，文字多谬，俗儒穿凿，疑误后

学，熹平四年（公元175年），乃与五官中郎将……奏求正定六经文字。灵帝许之。邕乃自书丹于碑，使工镌刻立于太学门外。于是后儒晚学，咸取正焉。

当时共刻7经46碑，有20万余字。隋唐后原碑湮没不存，后世陆续发现的均为残石。其中《周易》卦象共得11个，其画法与传世卦象的画法完全相同。因此，传世卦象的定型时期必在东汉以前（图2－1）。

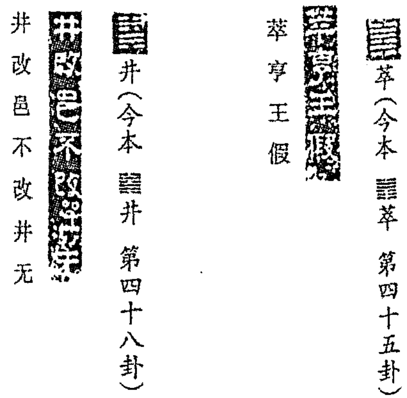


图2－1 《熹平石经》残片上的卦象（二例）
引自濮茅左《楚竹书周易研究》

2.2.2 商周时期的“筮数”

北宋重和元年（公元1118年），安州（今湖北孝感）出土6件青铜器，史称“安州六器”，为周初昭王时期所铸。其中的中方鼎在铭文之末铸有两组竖向排列的数字铭文：七八六六六六、八七六六六六，历代学者均不识其意。在商周时期的文物中，类似的数符组后来陆续多有发现，尤其是在对甲骨文的识读中亦发现了多例，从而引起了不少学者的注意（图2－2和图2－3）。

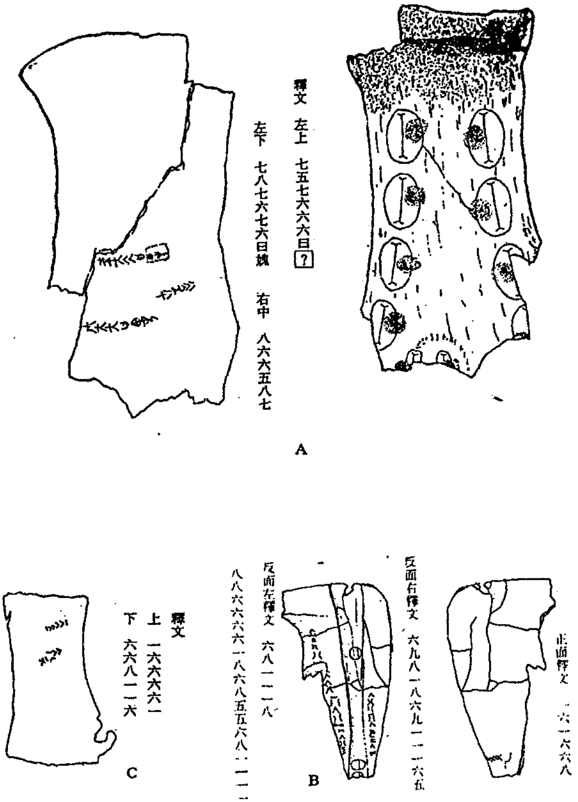


图2－2 卜骨上的筮数 A:晚商;B:西周;C:西周
引自濮茅左《楚竹书周易研究》

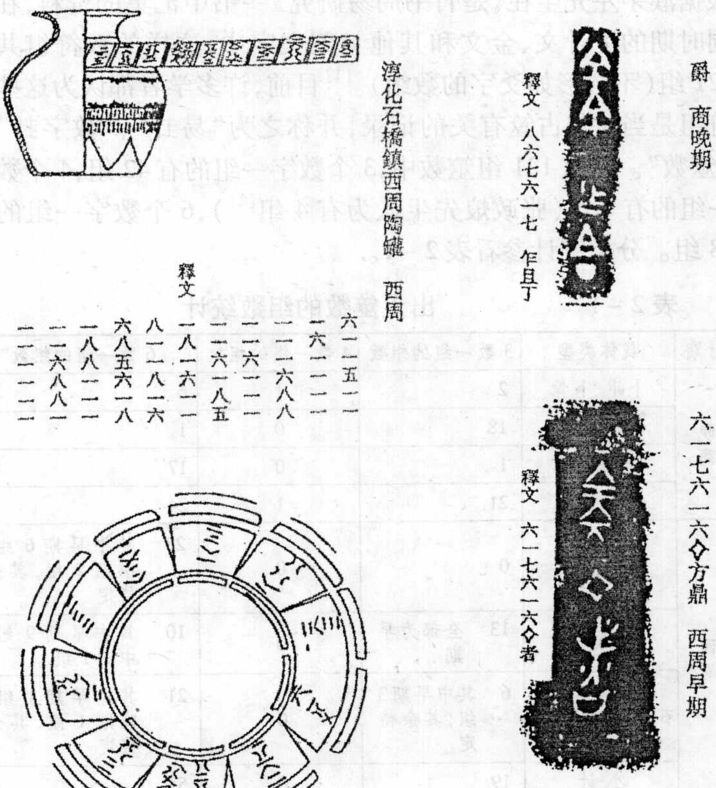


图 2－3 青铜器和陶器上的筮数

引自濮茅左《楚竹书周易研究》

根据濮茅左先生在《楚竹书周易研究》一书中汇集的资料，在商周时期的甲骨文、金文和其他契刻文字中，这样的数符组共有121组（不含形如爻字的数组）。[1]目前，许多学者都认为这些数符组是当时与占筮有关的记录，并称之为“易卦”、“数字卦”或“筮数”。在这121组筮数中，3个数字一组的有42组，4个数字一组的有1组（张政烺先生认为有4组[2]），6个数字一组的有78组。分类统计参看表2-1。

表2-1　　出土筮数的组数统计

时期	载体类型	3数一组的组数	4数一组的组数	6数一组的组数
晚商	卜甲、卜骨	2	1	6
	青铜器	18	0	1
	石器、陶器	1	0	17
	小计	21	1	24
西周	卜甲、卜骨	0	0	23　其中早期6组、中期2组，其余待定
	青铜器	13　全部为早期	0	10　其中早期9组、中期1组
	石器、陶器、骨器	6　其中早期3组，其余待定	0	21　其中早期1组、晚期1组，其余待定
	小计	19	0	54
东周	青铜器	2	0	0
合计121组		42	1	78

从表2-1中可以归纳出下述特点：

1. 筮数集中出现于晚商至西周时期。在年代更早的出土文物中尚未发现筮数，而从西周晚期起，出土筮数明显减少，东周筮数已很罕见，进入秦汉则完全不再有筮数出土。需要说明的是战国楚墓（天星观、包山和葛陵）出土的占筮简中记有卦象23

组 46 卦,有的学者认为它们都是筮数[3],而有的学者则认为它们都是卦象而不是筮数。本书将在第 7 章讨论这个问题,结论倾向于认为它们都是卦象,因而表 2-1 中没有将它们列入。

2. 西周时期的筮数多出现于西周早期。特别是青铜器上的筮铭,23 组筮数中仅有 1 组属于西周中期,其余 22 组全部出于西周早期。如果认为这是由于西周中晚期已逐步实现了由筮数转化为卦象的结果,应当是合乎情理的。但何以不见卦象的记录,则成了关键的问题。鉴于占筮行为不可能中断,因而笔者怀疑是不是在记录方式上发生了变化。原来是随占随刻,或由于某种原因需刻记筮数,而且是直接刻在甲骨、铸型或陶坯上,当然也有可能画于简牍或布帛上。到了西周中期或晚期,在卦象的形成过程中正好遇上了改用简牍记事,因而筮数也好,卦象也好,都用画于简牍上的方式做相关记录。由于简牍类的载体不易保存,所以现在已不可能再见到它们了。注意到卦象的最早记录出现于东周时期,例如《左传》所记和战国楚墓的占筮简上的卦象以及上海博物馆从香港文物市场购回的战国简本《周易》都能证实这一点,可知由筮数向卦象的转化过程极可能是在西周晚期内完成的。

3. 3 数一组的筮数与 6 数一组的筮数有并存现象,似乎表明占筮方法有两大类型。哪种类型先转化为卦象,或是大体同步转化,均不可考,但两类占筮互有影响则是可以肯定的。从 3 数筮数所占比例有逐渐减少的趋势分析,很可能 3 数占法最终融入 6 数占法中,因而在六十四卦卦象的构成里面自然也包括了八卦的卦象,这也是下文讨论以 6 数为主的原因。

在表 2-1 所统计的筮数中,涉及的数字以 1、5、6、7、8 为多,9 偏少,涉及 10 的筮数仅有 1 例(李零先生认为有两例[4]),2、3、4 三数则完全未见。出于对 6 数占法的重视,笔者

对 6 个数一组的筮数的数字构成情况做了统计，详见表 2－2。

表 2－2　6 个数一组的筮数中所用数字的个数统计

时期	载体类型	1	5	6	7	8	9	奇数	偶数	说明
晚商	卜甲、卜骨	1	2	14	12	5	2	17	19	共有筮数 24 组应使用 6 × 24 = 144 个数字，残损 6 个，共 138 个数字
	青铜器	1	0	2	2	1	0	3	3	
	石器、陶器	17	3	42	22	12	0	42	54	
	小计	19	5	58	36	18	2	62	76	
	出现频率	0.138	0.036	0.420	0.261	0.130	0.015	0.449	0.551	
西周	卜甲、卜骨	30	9	47	19	27	2	60	74	共有筮数 54 组，应使用 6 × 54 = 324 个数字，残损 5 个，共 319 个数字
	青铜器	12	3	28	11	5	0	26	33	
	石器、陶器	72	4	28	2	20	0	78	48	
	小计	114	16	103	32	52	2	164	155	
	出现频率	0.357	0.050	0.323	0.100	0.163	0.006	0.514	0.486	
合计		133	21	161	68	70	4	226	231	457
出现频率		0.291	0.046	0.352	0.149	0.135	0.009	0.495	0.505	

从表 2－2 中可以归纳出下述特点：

1. 筮数中没有 2、3、4 三种数字。张政烺先生解释说：

> 我的看法是二、三、亖（四）、都是积画为之，写在一起不易分辨是几个字，代表哪几个数，所以不能使用，然而这三数并非不存在，而是筮者运用奇偶的观念当机立断，把二、四写为六，三写为一，所以一和六的数量就多起来了……这一点果然成立，则殷周易卦中一的内涵有三，六的内涵有二、四已经带有符号的性质，表明一种抽象的概念，可以看做阴阳爻的萌芽了。[5]

2. 1 字在商代占 19/138，为 14%左右，到了西周则为 114/319，占到 36%左右，而 5、7、9 三数所占的百分比则有所下降，

显示出符号化因素存在着逐渐增强的趋势。

3. 奇数和偶数的出现频率倾向于各占一半。如果引入奇偶的概念,从表2-2中立即可以看出不论是分类统计还是综合统计,奇偶数的出现频率都明显地倾向于各占一半。这种现象是否纯属偶然,目前还难于做出判断。但是从中有两点提示:一是古代占筮家们使用的占法极有可能与筮算得数的奇偶性质有关;二是将筮得的2、3、4三数依奇偶归入1和6中或者筮得5、7两数时也许曾有改记为1的做法(参看本书第4章4.5节),均应不违背以奇偶作占的相关规则。至于古代占筮家们为什么要将筮得之数转化为奇偶符号的主要原因,本书第7章7.2.1中提出了一种推测。

4. 涉及数字与传世揲算的得数有明显差异。传世揲算得到的结果数只有6、7、8、9四种可能。如果认为2、3、4三数已作了归并,所以与揲算结果数相比,形式上只多出1、5两数,但从筮算结果数考虑,应包含1~9这九个数字。如果考虑出现得较多的1、5、6、7、8诸数,也与传世揲算的结果数不符。要想从已有的这些筮数材料推测出当时所用的算法规则显然是很困难的。而且这些数符组是否全与占筮有关?与占筮有关的部分与传世的《周易》占法又有怎样的承续关系?等等,都是有待研究的问题。笔者估计,这些筮数的获得途径可能有多种,其中有些也许的确是早期揲算的结果。在本书第4章4.5节中,笔者按揲算模式对一些筮数的获得算法做了相应的估计。

2.2.3 战国竹简中的卦象

根据已发表的考古资料(图2-4),目前所见最早的六十四卦卦象出自1994年新蔡葛陵楚墓出土的战国竹简[6]。该墓的墓主人卒于楚肃王四年,即公元前377年。竹简中的卜筮简录

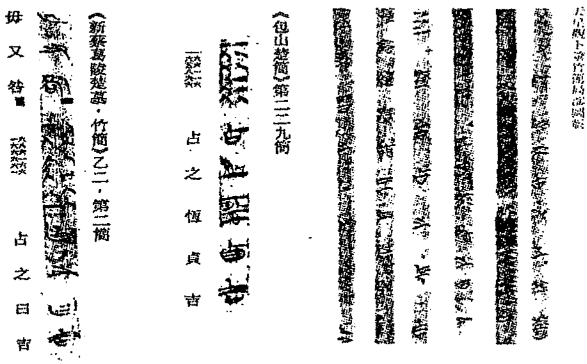


图2-4 战国楚简中的卦象(按筮数释出)
引自濮茅左《楚竹书周易研究》

有两卦一组的卦象共15组30卦,其中有12组24卦为完整卦象。这些卦象的阳爻均为一横画,符号化的性质已毋庸置疑,若将它们视为数字1肯定是不妥当的。阴爻则画做两斜画,在102个阴爻中,有92个两斜画的上端相连,而上端分开作八字形或两斜画交叉的则各有5爻。有学者认为这些阴爻应视其形态分别释为数字6 8和5,阳爻也应释为数字1,因而它们都是筮数。李学勤先生指出,这是一种误读,并论证两斜画都是阴爻,一横画都是阳爻,所以它们应当是卦象,不是筮数。[7]在这些卦象的爻符中以占总数5%左右的两斜画交叉画出的阴爻最为敏感。在筮数说中它是数字5,由于是奇数,当有阳爻的地位。而在卦象说中它则是阴爻,使交叉画出的两斜画陷于难以判断阴阳属性的窘况。笔者倾向于认为将两斜画交叉画出,并非5字,而是一种特殊的阴爻符号的原因,除李先生提出的理由之外,还因为这些卦象极可能是用《周易》变卦占法画出(详见本书第6章6.2节),而揲算结果数中并无5这个数。至于“八”字画法,如果不是因为笔误将两斜画写分开了的话,既可能也是

一种特殊的阴爻符号，也很可能是早期卦象中残留有筮数的表现。这些非标的或特殊的卦象很可能是《易》占记录方式由筮数向卦象的过渡阶段中出现的形态。当然，这种在少数情况下在卦象中使用某些特殊符号或以数字表爻符的记录方法遵循着怎样的规则，应当自有解释，不可能是古代占筮家的随意之作，只是我们今天已很难获得具体的了解。从性质上看，在卦象中掺加进个别的特殊符号或者数字虽有今天已难于知道的原因，然而它们的存在并不能改变占筮记录形式已实现了符号化的事实。笔者倾向于赞同将这种画法释为阴爻的做法。也就是说，在战国时期的卦象记录中，一般情况下凡一横画都是阳爻，凡两斜画都是阴爻。

与葛陵简类似的卦象画法还见于1987年荆门包山楚墓（墓主人卒于楚怀王十三年，即公元前316年）出土的战国竹简，其中的占筮简中录有两卦一组的实占卦象记录，共得6组12卦，每卦6爻。阳爻均做一横画。在38个阴爻中，两斜画的上端相连的有31个，上端分开的有6个，两斜画交叉的则有1个。[8]

1978年江陵天星观楚墓出土一批竹简，入葬时间断为公元前350年左右，为战国中期。据张政烺先生《易辨》一文介绍的5组10卦60爻中，画为一横画的有24个，两斜画上端相连的有33个，两斜画上端分开的有1个，其余两个则是数字7和9。如果视为筮数，它们分别是1（24个）、6（33个）、7（1个）、8（1个）和9（1个）。张先生认为：

> 在这些卦例中，一、六出现次数最多，已经不是筮数的自然现象，而是作为奇偶符号……七、八、九这三个数字如果是筮用数字，至少当出现三十多次，却如此罕见，这是什么原因呢？我的看法，当时的卦爻以一、六为主体，而使用的筮数原是有七、八、九的，到写成卦

画时,一般都变成一和六了,在这几处偶然出现,或是由于某种原因(尚不明白)而保留着的。[9]

笔者估计,这些卦象中的7、9两数也许是残留的筮数,它们应是阳爻,但仍写成数字,可能与当时所用的表示某种特殊含义的记录方法有关。这个现象似乎也是占筮记录方法在由筮数过渡为卦象的过程中遗留下来的痕迹。8字则是阴爻的特殊记法,也许同样是残留的筮数。

1994年,上海博物馆从香港文物市场购回一批竹简,估计是1993年盗自荆门郭店的楚墓之物,入葬年代属战国中晚期,即公元前350~前300年左右。这批竹简中有一部《周易》,是目前发现的书写年代最早的《周易》文本。[10]其中完整的卦象有25个,都是6爻一卦,画法上均为阳爻做一横画,阴爻做两斜画。需要指出的是阴爻的两斜画均为上端分开呈"八"字形,并无上端相连和交叉画出的形式。注意到葛陵、包山和天星观竹书卦象都是实占记录,爻符画法的差异应与当时各地具体流行的占筮记录方式有关,而上海博物馆《周易》简中的卦象画法却已经定型。由于这些材料都出自楚地,书写时期也比较接近,似乎表明实占时还残存着对定型了的卦象画法局部调整为筮数的做法。

1997年阜阳双古堆汉墓出土的简本《周易》是西汉文物。[11]1973年长沙马王堆汉墓出土的帛书《周易》的抄写时间不迟于公元前168年,也是西汉早期的文物。[12]这些简帛卦象的画法均为阳爻做一横画,阴爻做两斜画(或有弯折),都是不能释读为筮数的画法。显然,汉代的这些卦象画法是战国竹书《周易》中卦象画法的沿袭。

在传世古籍中,以《左传》所记卦象为最早,录有春秋时期使用的卦象共38个,全是6画卦象。估计在早期的《左传》文本中,阴爻都做两斜画画出,只是这种较原始的版本今天已见不到

了。在《左传》的传世版本中，阴爻的画法都是两短横画，可能是按《熹平石经·周易》做了规范化调整的结果。

此外，晋武帝咸宁五年（公元 279 年），一个叫做不准的人挖掘了史称汲冢的古墓，出土了一批战国竹书。汲冢应是魏襄王的墓，因而汲冢竹书的抄写时间应不晚于公元前 3 世纪初年，当与上海博物馆购藏的战国竹简是相近时期的文物。汲冢竹书中有《周易》一书，唐修《晋书·束皙传》说："其《易经》两篇，与《周易》上下经同。"晋人见到竹书时，距《熹平石经》刊布已有百余年，他们用做比照的"《周易》上下经"应是作为标准的石经文本，似乎汲冢竹书《周易》中的卦象也应将阴爻画做两短横画。由于汲冢竹书《周易》已经不传，故无法对此做出确切的判断，但笔者估计，晋人比照的结果很难认为是一字一画全都相同，由于卦象中阴爻的斜平两种画法并无性质上的不同，比照时对这种画法上的差异很可能就略而不述了。因而仅仅依据晋人的说法，似难将传世卦象画法出现的时期上溯于战国晚期以前。

2.2.4 卦象形成过程的推测

将上述材料综合起来，可以整理出卦象形成过程的大致线索：早期的占筮可能不作文字或符号的记录，所以筮数和卦象都是占筮术发展到一定阶段以后出现的事物。商代出现了筮数，这种直接记录筮算结果数的方式也见用于西周，其间，筮数有局部符号化的趋势。在西周晚期和春秋时期的出土文物中，筮数与卦象都少有或没有发现，但依《左传》的记载，似可认为卦象的形成不迟于西周晚期，不过直到战国时期，在卦象的画法中有时还残留着以特殊符号或数字表爻符的现象。早期的卦象采用阳爻做一横画，阴爻做两斜画的画法，这种卦象形态一直沿用到西汉。将阴爻画做两短横画的画法出现于汉代，东汉时期已普

遍流行这种画法，自东汉晚期刊刻《熹平石经》以后，这种画法便成了传世卦象的标准画法。如果忽略阴爻在早期画为两斜画和后来改为两短横画的非实质性的差异，可以认为六十四卦和八卦的卦象定型时期应不迟于西周晚期。这个结论与本书将要讨论的揲算定型的时期也不迟于西周晚期是适配的。

2.3 卦象的数学特点

用现代数学的理论，可以从不同的角度观察卦象的数学特点。当然，这种观察都是现代人所做，原则上都是现代人的看法，不能认为古代占筮家们也具有这样的数学认识。

2.3.1 原始状态的组合数学思想

根据组合数学理论，卦象的构成遵循重复排列的数学规律。即，用两种元素（阳爻和阴爻），每次从中可重复地选取 n 个元素为一组，共有 2^n 组互不相同的排列。对于八卦，$n = 3$，所以用阳爻和阴爻可以排列出 $2^3 = 8$ 种互不相同的 3 画卦象。如果取 $n = 6$，则可以排列出 $2^6 = 64$ 种互不相同的 6 画卦象。显然，上述说法的意思是互不相同的 3 画卦象全部列出来也只有 8 种，而互不相同的 6 画卦象全部列出来也只有 64 种，再不会出现更多的种数。古人肯定并不具备组合数学的理论知识，当他们萌生出用阴阳二爻做 3 爻一组的排列的想法时，只能采用逐一枚举的方法将所有可能出现的情形画出，结果是发明了八卦。六十四卦则是在同一思路的支配下，仍然采用逐一枚举的方式找到的。由于这两类卦象的具体数量都很有限，用枚举的办法画出它们是完全可能的。当然，他们也只能采用这种方法来排出所有的卦象。可以肯定，古代占筮家们既有卦象构成方式上的基础性想法，又找到了可行的枚举方法将它们逐一排出，已是一种

数学成果。用今天的术语来说,不妨称之为最为古老的组合数学思想及成功应用的实例。

应当指出,这种原始状态的组合数学思想对后人是有影响的,尤其是占筮家们受到的启发最为直接。例如,除春秋时期田忌赛马的组合对策之外,西汉时期出现的《易林》和《太玄》就是模仿《周易》的占筮方法。下面顺带简介它们的卦象种数的计算。

焦延寿是西汉昭帝(公元前86~前74年在位)时期的易学家,他自创的《易林》占法是在《周易》六十四卦的基础上,每卦配置64种变卦(变卦规则详见本书第5章,此处从略),因而共有$64 \times 64 = 4096$种情形,焦氏对应地配置了4096条释占繇辞。如果将这样得到的情形视为4096种新卦象,它们就是用阴阳两种爻符,可重复地将12个爻符构成1个卦象时所得到的结果,此时$n = 12$,因而共有$2^n = 2^{12} = 4096$种不同的12画卦象。当然,《易林》中并未画出这种12画的卦象,而是按64种6画卦象分组,每组再各配64种变卦的方式进行繇辞排列的。

杨雄是西汉末年的易学家,他创制的《太玄》占法则另有一套卦象系统。《太玄》使用“——”、“— —”、“- - -”三种爻符,其卦象称为“首”,每首均由可重复取用的4个爻符构成,即$n = 4$,因而一共有$3^n = 3^4 = 81$首。各首有自己的名称,例如符号画做“☰”的首就叫做《干》。

2.3.2 卦象与二进制

莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646~1716)是著名的德国数学家,二进制算术是他的一项重要发明。由于在电子计算机的研制中,与二进制相关的数学理论有着重要的应用,所以现代数学中对二进制数学理论的研究受到了普遍的重视。过去学术界一直认为莱布尼茨是在发明了二进制算术以后,才见到传教士们

从中国带到欧洲的伏羲八卦和六十四卦图像的，尽管莱布尼茨认为他见到的卦象体系与二进制记数体系相似，但在许多数学史著作中都认为二进制算术的发明并非受卦象启发的成果。胡阳和李长铎先生在《莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考》一书中指出，经他们的考证，1658 年意大利传教士卫匡国写成《中国上古史》一书，将伏羲八卦和六十四卦介绍到了欧洲，莱布尼茨在发明二进制之前就见到了伏羲八卦和六十四卦，并受卦象构成规律的启发，于 1679 年发表了关于二进制的文章，后来又于 1703 年发表了关于二进制算术的研究论文，从而得出“莱布尼茨发明的二进制是源于伏羲八卦图”[13]的结论。按照胡、李二先生的考证，这段史实表明，二进制记数方法的发明是 1658 ~ 1679 年间缘于中西文化的交流，人们在数学上取得具体成果的一个例证。然而关于卦象是不是二进制记数方法的问题，就笔者所知，有两种不同的看法。一种认为“伏羲八卦图本身就是二进制。”[14]另一种认为“八卦或六十四卦，与二进制暗合，但它们本身不是二进制。”[15]要解决这个问题，关键在于如何定义“二进制”。或者说，这是问：凡是由可重复取用的两种不同元素构成，且按一定顺序做出的排列都是二进制记数方法吗？

数学上的进位制是指用一定数量的基本数字序列按位置制构造的一种记数系统。在多种记数系统中，人们日常所用的进位制以十进制最为普遍，这是一种使用 0 ~ 9 十个基本的数字序列，逢 10 进位的记数系统。在进位制中，前面所说的 n 值相当于数码的位数，例如当 $n = 3$ 时，在十进制中可构成 $10^n = 10^3 = 1000$ 个数码，它们表示了最高位数为 3 位数时，从 0 ~ 999 这 1000 个按位置制排序的整数。在二进制中，所用的基本数字是 0 和 1，当然也可以用其他符号或状态，比如阴阳爻符或电路的开和关，但必须将这些符号或状态视为数，并建立逢 2 进位的规

则。当 $n=3$ 时，就有 $2^n=2^3=8$ 个数码，它们的最高位数也是 3 位，但只表示十进制中的 0～7 这 8 个整数。在二进制中，所用的两种基本元素不管写成什么符号，甚至变成电路的开启和关闭两种状态，它们都被视为数，按位置制排列的符号码或状态码也都是数码，因而是一套记数的序列，其用途是记数。在卦象中，所用的两种基本元素是阴爻和阳爻，爻符由揲算结果数转化而得。揲算是一种十进制下的数算方法，所得结果数有 6、7、8、9 四种可能。阳爻由其中的奇数 7、9 转化而成，阴爻则由偶数 6、8 转化得到，因而从来源上看，爻符虽与数有关，但作为符号，其涵义是数的奇偶特性，而不再是具体的数。另一方面，古代占筮家们发明出这一套爻符卦象系统，其目的是想通过它们沟通人神，用来占测人事的吉凶，并非用来记数。在实用中，爻符卦象甚至连奇偶涵义都被淡化了，而被赋予了阴阳、天地、水火、刚柔、强弱等等象征性的意义，惟独没有发现将它们转化为数或数码的做法。因而卦象系统并不具备记数的功能，更谈不上从中发展出二进制算术。如果视爻符卦象为数符，还需要排序得当，使之具有逢 2 进位的形式才能用于记数。正好北宋占筮家邵雍所说的先天图，也就是伏羲八卦和六十四卦的排序就与之相符，因而具有将它们视为 8 个或 64 个数的二进位记数序列的条件，莱布尼茨所受启发即与此有关。而按文王卦序，即今本《周易》的卦序，就排不出来。由于古代占筮家们并没有将卦象系统用于记数，在卦象的排序上并无严格的记数要求，历史上就出现过至少两种不同的形式，先天卦象图只是其中的一种，所以直接认为伏羲八卦本身就是二进制并不合适。当然，反过来，说二进制是一种由可重复取用的两种不同元素构成的排列，则是可以的。

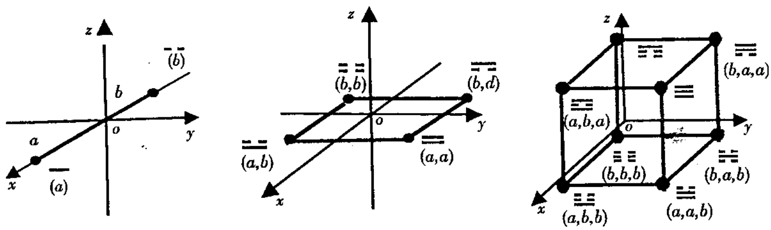
看来，卦象是中国古代占筮家们的发明，但不能认为卦象本身就是二进制记数方法，莱布尼茨受其启发，于占筮之外发明了

性质和用途都不相同的二进制记数方法及二进制算术，这件事证明了不同民族或国家之间保持文化交流具有促进思想进步和科技发展的重要作用。当然，各个时代都有自己的特征，莱布尼茨从《周易》中观察到的东西，除了卦象构成中所显示出的具有可用于记数的功能之外，也许还有中国古人对天地神祇的崇拜。正如拉普拉斯（P. S. Laplace，1749 ~ 1827，法国数学家）所说："莱布尼茨在他的二进位算术中看到了宇宙创始的原象。他想象 1 表示上帝，而 0 表示虚无，上帝从虚无中创造出所有实物，恰如在他的数学系统中用 1 和 0 表示了所有的数。"[16]

2.3.3 《周易》卦象在三维空间中的点阵形式

既然卦象是一种有着严格构成规律，又可赋予不同涵义的符号系统，受其启发，就可能得到各种不同的结果。例如，除了在平面上对卦象进行排序之外，还可以将卦象排成空间点阵的形式，在这方面，学者们已有不少成果，其中比较有趣的是将《周易》卦象表为三维空间中的点阵形式。

令长度为 a 的线段的一个端点为阳爻，长度为 b 的线段的一个端点为阴爻，利用直角坐标系，可建立图 2－5 中画出的三种最基本的《周易》卦象点阵：

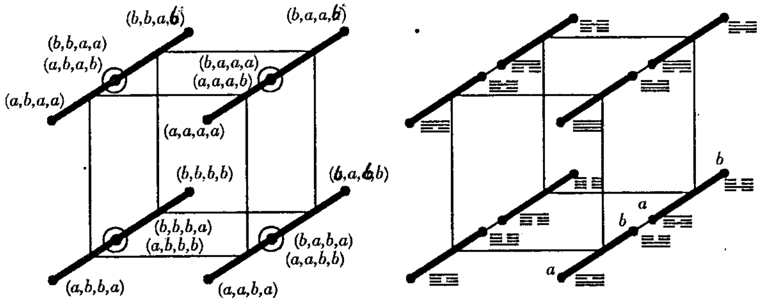


1画卦的点阵　　2画卦的点阵　　3画卦的点阵

图 2－5　用线段 a 和 b 定义的三种基本的《周易》卦象点阵

在这三种基本点阵中，各点的记号与坐标相符，但并无坐标的性质，引入坐标系完全是为了便于表达和理解。也就是说，卦象的画数并不是空间的维数。其中，由 8 个点构成的 3 画卦的点阵对应于八卦，它就是八卦点阵。

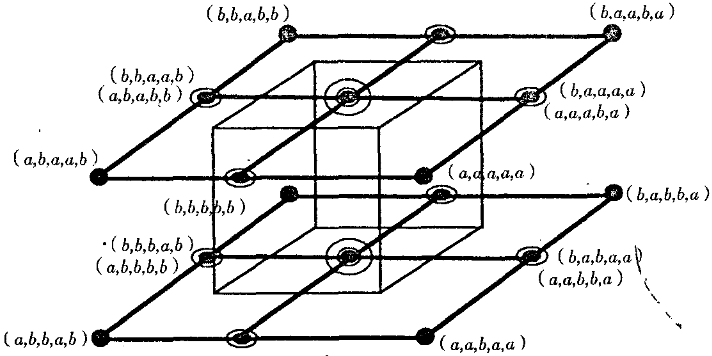
以八卦点阵为基础，在 8 个点处按图 2 – 6 所示的形式分别平移叠加 1 画卦的点阵，可得《周易》4 画卦的点阵，这些点共有 16 个，代表了 16 个 4 画卦象。图 2 – 6(A)中加圈的点表示两点重合，在具体排画卦象时，可以将它们沿轴向适当拉开距离画出[见图 2 – 6(B)]。后面还会遇到不少重合点，均可在拉开距离后将卦象画出。



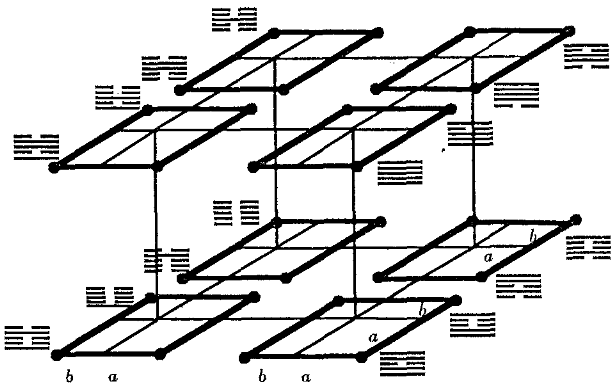
(A) (B)

图 2 – 6 《周易》4 画卦的点阵

以八卦点阵为基础，在 8 个点处按图示情形平移叠加 2 画卦的点阵，可得《周易》5 画卦的点阵，这些点共有 32 个，代表了 32 个 5 画卦象(图 2 – 7)。图 2 – 7(A)中加圈的点是两点重合，加双圈的点是 4 点重合。图 2 – 7(B)是拉开距离后的情形。



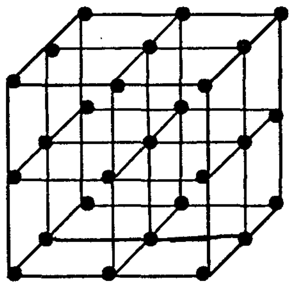
(A)



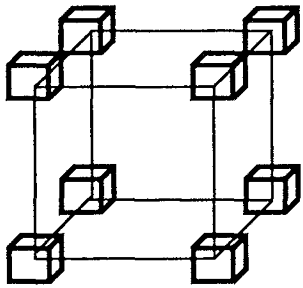
(B)

图 2－7 《周易》五画卦的点阵点阵记号和卦象符号各有 32 个，图中画出 16 个

以八卦点阵为基础，在8个点处分别平移叠加3画卦的点阵，可得《周易》6画卦的点阵，所得64个点代表64个6画卦象（图2-8）。注意图2-8(A)中有许多重合的点，拉开距离后，可表示为图2-8(B)。图中64个点的记号和与之相对应的卦象均略去未标。



（A）6画卦（六十四卦）的点阵



（B）拉开距离后的6画卦的点阵

图2-8 《周易》6画卦点阵

显然，以六十四卦的点阵为基础，在64个点处按上述规则分别平移叠加1画点阵、2画点阵和3画点阵，就能构造出7画卦、8画卦和9画卦的对应点阵，它们代表的卦象个数分别为128个、256个和512个。继续做下去《易林》中所隐含的4096个12画卦象也可以在三维空间中排出相应的点阵。至此，已可明显地看出，卦象的画数在性质上不是表征空间特性的维数。表示点阵中各点的记号，也都不是坐标。所以，图2-8并不是“六维空间的六十四个点在三维空间的投影”。[17]

2.3.4 《太玄》卦象在三维空间中的点阵形式

《太玄》的卦象称为“首”，但为方便起见，这里仍然称之为卦象。《太玄》的卦象由3种爻符构成，每卦4爻，因而一共有$3^4=81$种互不相同的4画卦象。只要建立合适的规则，便可以找到将它们表为立体点阵的具体形式。例如，用长度为a、b、c的三根线段各取一个端点表示1种爻符，便可定义出3种不同的爻符。任取一个直角坐标系，即可得到《太玄》1画卦点阵。如图2－9所示：

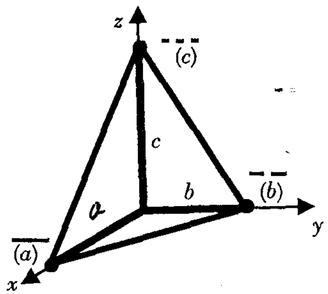


图2－9 《太玄》1画卦点阵

将这个最基本的点阵依次叠加到其本身的(a)、(b)、(c)三个点处，叠加的规则是平移1画卦的点阵的坐标系，将原点置于原有的点处。而记录的规则是每叠加一轮，就增加一个相应的线段记号。第一轮叠加得到的《太玄》2画卦的点阵如图2－10，加圈的点为两个点的重合点，因而一共有$3^2=9$个点，它们代表了9个2画卦象。在《太玄》卦象中，爻符顺序是从上向下排，恰与《周易》卦象中爻符的排序方向相反。

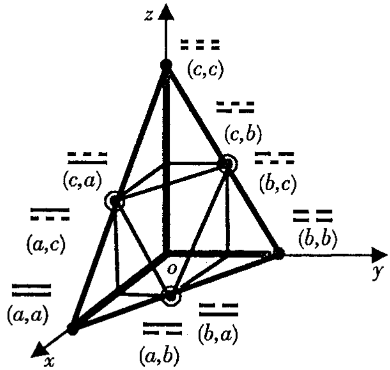


图2－10 《太玄》2画卦点阵

第三轮叠加可得《太玄》3画卦的点阵如图2－11,加单圈的是3点重合,加双圈的是6点重合,共有$3^3=27$点,代表了27个3画卦象。图中只标出了3个单点的记号和卦象。

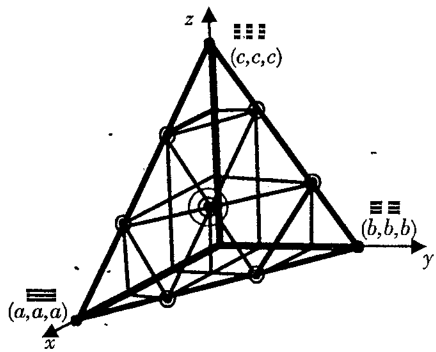


图2－11 《太玄》3画卦点阵

将1画卦的点阵再叠加到上述27个点上,可得《太玄》4画

卦象的点阵，共有 $3^4=81$ 点，代表了 81 种卦象。这就是《太玄》卦象的一种立体排序形式（图 2－12，图中只标出了 3 个单点的记号、卦象和卦名）。其中：D、E、F、G、H、I 六个点为 4 点重合；J、K、L 三个点为 6 点重合；M、N、P 三个点为 12 点重合。这 81 个点都落在由 A、B、G 三点所决定的倾斜平面上。显然，继续做下去，可以得到各种画数的《太玄》卦象点阵。其中重合点的卦象意义，是同类爻符的个数确定时，这类卦象的个数。而这类卦象中各卦的不同则在于爻符位置的轮换。

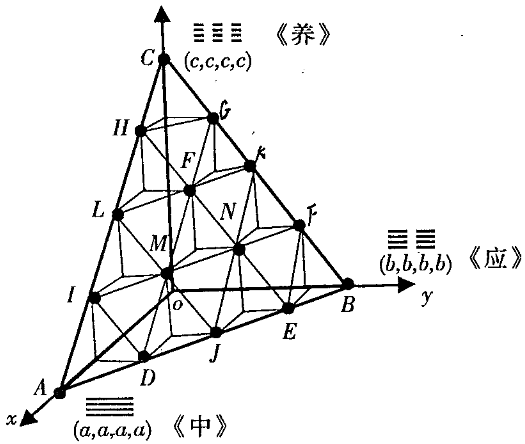
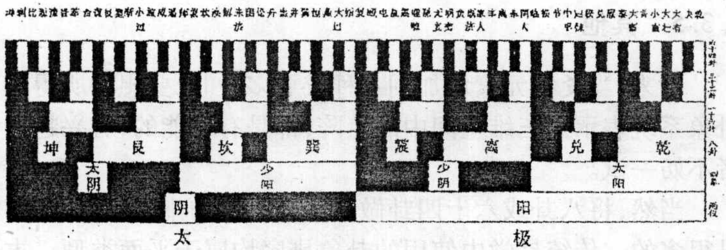
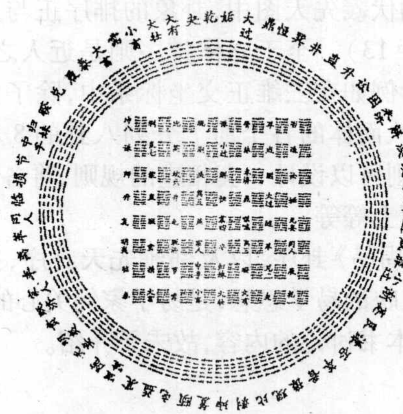


图 2－12 《太玄》4 画卦点阵



伏羲六十四卦次序



伏羲六十四卦方位

图 2 – 13　伏羲先天图(二例),引自(宋)朱熹《周易本义》

2.3.5 其他

看来,当爻符元素增加到4种或更多种时,要想将所得到的卦象系统表示为三维空间中的点阵,都是有可能的,有兴趣的读者不妨一试。

当然,将八卦或六十四卦做平面或立体的排序,可能的排法是很多的。传统易学中使用的卦象排序均属于平面类型。古代占筮家们发现了"《易》有大(音 tài)极,是生两仪,两仪生四象,四象生八卦",(《易传·系辞上》)直至生成为六十四卦的分枝排序规律,列出了八卦和六十四卦的线状序列以及方图或圆图,尤其是在邵雍的伏羲先天图中,卦象的排序正与二进制数序的排法相同(图2-13)。至于立体排序则是近人之作,能够排出的形态也很多。例如在三维正交坐标系中,除了前述的点阵排法,还可以在正八面体的各个面上分列八卦的8种卦象。又如使用极坐标时,则可以设计一套相应的规则,将各种卦象分置于球面或其他曲面上等等。

关于今本《周易》卦序,以及邵雍先天卦序,甚至近人所作立体排序中所反映的易学思想,是易学家们关心的课题,研究成果颇丰,但不属本书讨论的内容,故未予介绍。

注释:

[1]濮茅左:《楚竹书周易研究》,上海古籍出版社2006年11月版,第435~485页。

[2]张政烺:《易辨》,载《中国哲学第十四辑》,人民出版社1988年1月版,第12~13页。

[3]李零:《中国方术考》,东方出版社2001年8月第2版.第295页。

[4]李零:《中国方术续考》,东方出版社2001年8月第2版.第310~311页。

[5]张政烺:《易辨》,载《中国哲学第十四辑》,人民出版社 1988 年 1 月版,第 4 页。
[6]河南省文物考古研究所:《新蔡葛陵楚墓》,大象出版社 2003 年 10 月版。
[7]李学勤:《周易溯源》,巴蜀书社 2006 年 1 月版,第 280 ~284 页。
[8]湖北省荆沙铁路考古队:《包山楚简》,文物出版社 1991 年 10 月版。
[9]张政烺:《易辨》,载《中国哲学第十四辑》,人民出版社 1988 年 1 月版,第 7 页。
[10]濮茅佐:《楚竹书周易研究》,上海古籍出版社 2006 年 11 月版,第 1 ~23 页。
[11]韩自强:《阜阳汉简周易研究》,上海古籍出版社 2004 年 7 月版。
[12]邓球柏:《帛书周易校释》,湖南人民出版社 1996 年 8 月版。
[13]胡阳、李长铎:《莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考》,上海人民出版社 2006 年 8 月版,第 88 页。
[14]胡阳、李长铎:《莱布尼茨二进制与伏羲八卦图考》,上海人民出版社 2006 年 8 月版,第 84 页。
[15]邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》,河北科技出版社 2001 年 9 月版,第 172 页。
[16](美)R. 柯朗、H. 罗宾:《什么是数学》,左平、张饴慈译,复旦大学出版社 2005 年 10 月版,第 15 页。
[17]董光璧:《易图的数学结构》,上海人民出版社 1987 年版,第三章第四节。

第3章 《周易》占筮的揲扐算法

使用《周易》作占时,用到的爻符和卦象须由揲扐算法的结果数确定。本章主要介绍传世《易》占揲算的操作规则和学者们从数学的角度研究这种计算方法的大概情况。

3.1 揲扐算法

3.1.1 《易传·系辞上》记载的揲扐算法

目前所知,《周易》占筮所用的成卦算法,以战国时期成书的《易传·系辞上》的记载为最早。其文云:

> 天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五,地数五,五位相得而各有合。天数二十有五,地数三十,凡天地之数五十有五。此所以成变化而行鬼神也。大衍之数五十,其用四十有九。分而为二以象两,挂一以象三,揲之以四以象四时。归奇于扐以象闰,五岁再闰,故再扐而后挂。《乾》之策,二百一十有六,《坤》之策,百四十有四,凡三百有六十,当期之日。二篇之策,万有一千五百二十,当万物之数也。是故四营而成易,十有八变而成卦。八卦而小成。引而伸之,触类而长之,天下之能事毕矣。显道神德行,是故可以酬酢,可与祐神矣。子曰:知变化之道者,

其知神之所为乎！

由于这种专门用于《易》占成卦的算法以“揲”和“扐”为主要特征，故称之为“揲扐算法”，简称揲算。而在传统易学中，则有“揲蓍”、“蓍算”、“筮算”等多种说法，就成卦算法而言，意思都是相同的。上述记载涉及的数字不少，习惯上通称“易数”。易数中最基本的数字是从1到10。其中奇数称为“天数”，偶数则称为“地数”。如果不去解释各数的易学含义，纯从数字得来的数学关系看，有如下述：

1. “天数二十有五”：$1+3+5+7+9=25$。

2. “地数三十”：$2+4+6+8+10=30$。

3. “天地之数五十有五”：$25+30=55$。

4. “大衍之数五十”：50这个数是怎么来的，易学家们历来有不同的说法。据彭涵梅先生在《大衍之数五十初探》一文中的研究，发现“主要的说法计有十三家之多”。[1]若不论易学含义，只计数字，可归结为以下情形（所涉人名都是古代易学家或数学家）：

（1）京房：$10+12+28=50$；

（2）马融：$1+2+2+4+5+12+24=50$；

（3）荀爽：$8\times6+2=50$；

（4）邵雍：$(1+3+5+7+9)\times2=50$；

张行成：$1+1+3+3+5+5+7+7+9+9=50$；

（5）宋咸：$1+2+3+4+5+6+7+8+1+3+10=50$；

（6）陈抟：$100\div2=50$；

（7）李之才：$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+1+2+3+4=50$；

（8）秦九韶：$2\times3\times4+3\times4\times1+4\times1\times2+1\times2\times3=50$；

（9）虞翻、郑玄、刘牧：$55-5=50$；

（10）刘歆：$5\times10=50$；

(11)杨雄:(1+6)+(2+7)+(3+8)+(4+9)+(5+5)=50;

(12)胡瑗:传抄过程中将“五十有五”漏脱“有五”二字,便成了“五十”。

彭先生认为,上述说法都有牵强比附之处,因而并不可信,只有排为第13家的王弼、孔颖达之说“可以接受”。王弼认为:“演天地之数,所赖者五十。其用四十有九,其一不用也。”孔颖达疏之曰:“据王弼此说,其意皆与诸儒不同,谓自然所须策者唯用五十。就五十策中,其所用揲蓍者,唯用四十有九。”(语见《周易正义·卷七》)这是说,要想揲算得以顺利实施,只能从50策中去掉1策。可见古代占筮家中也有人注意到了所用策数最终是49策,乃是服从自然法则,遵循数学规律的必然选择,是不可以按自己的想象任作比附的。既然核心的数字是49,那么55或50是怎么进入《易传·系辞》中的仍然是一个问题。本书将在第7章7.2.4中予以讨论。

5.“其用四十有九。分而为二以象两,挂一以象三,揲之以四以象四时,归奇于扐以象闰,五岁再闰,故再扐而后挂。”和“是故四营而成易,十有八变而成卦。”这是与揲算规则有关的内容,现将其中与数学计算有关的环节译出如下:

(1)“分二”。准备49根蓍草茎或筹策,将它们任意地分成两堆,这个用手动操作完成的环节就叫做“分二”。分2操作的特点是随机性,即必须是将49策随机地分成两堆,不能数好了再分。在后续的计算过程完成以后,将因分2时的具体情况而得到不同的结果数,但可能出现的结果数一共只有6、7、8、9四种。然后依据所得结果数的奇偶定出阳爻或阴爻,最终得出卦象。因而爻符的获取是随机的。《易传·系辞上》所说的“阴阳不测之谓神”,就是源于分二操作的随机性。

(2)“挂一”。从任意一堆策中抽出 1 根策挂夹于左手小指与无名指指间的操作称为“挂一”。挂出的这根策将退出下一步的计算。挂 1 环节的设置大大增强了揲算过程的神秘感。就占筮而言,是令信众深感筮算玄奥神奇的有效手段。就数学而言,这是一种对基本算法的附加处理,是一种锦上添花的设计。它使人们在破解揲算的一般性规律时,遇到了额外的困难。

(3)“揲四”。所谓“揲”,专指《易》占中的点数取策操作。“揲四”即 4 根 4 根地将策分别从两堆策中数出,规则是数到每堆剩余的策数等于 4 或者小于 4,但不能为零。从两堆策中揲出的揲得策数必定是 4 的整数倍,合在一起后,将用于下一步的计算。揲策数取为 4,是一种规则性约定,是《易》占揲算所取参数中的一种。

(4)“归奇于扐”。“奇”的意思是零散、剩余。“归奇”是指将揲后剩余的策归拢的操作。“扐”的意思是将归拢的余策夹于左手食指、中指和无名指的两个指间,也是一种操作行为。注意到挂出的 1 策也是“扐”于指间,故有“挂扐”之称。所谓归扐之策可以理解为挂出的 1 策与揲后余策之和。这些策都将退出下一步的计算。由于要夹策于指间,在筹策粗细和长短上应有一定要求。1971 年 8 月,陕西千阳汉墓出土了一组用兽骨磨制的算筹,共得 31 根,长度多为 13.5cm,直径多为 0.3cm。[2]这些算筹很可能也用于揲算,从其尺寸来看,使用这样的筹策可以顺利完成挂扐操作。

(5)“四营而成易”。上述分 2、挂 1、揲 4、归扐四个操作步骤合称为“四营”。“易”即变易。“四营而成易”的意思是经过四营即完成一次变易。对 49 策实施四营操作,称为第 1 次变易。这里的变易有两种含义。第一种是因挂扐而有一部分筹策退出下一步的计算,使下一步计算时参揲的策数发生了变化。

第二是进入下一步的参揲策数有 44 策和 40 策两种可能，变得的是哪一种，要看分 2 的情况才能确定。由于分 2 是随机的，所以具体得到的是哪一种也是随机的。

(6)“十有八变而成卦”。这句话的意思是经过 18 次变易后即能画出一个 6 画卦象，可知每个爻符都是经历了 3 次变易之后才得到的。对 49 策做四营是第 1 次变易，再对揲得策数继续做四营，这是第 2 次变易，然后再次对揲得策数做四营便是第 3 次变易。由于每个爻符的确定都是独立完成的，即每个爻符都是从 49 策开始，经 3 次变易后得出，所以只需对求取 1 个爻符的 1 轮揲算进行研究，就可以掌握揲算成卦的全部情况了。

在上述引文中，“象两”，是指“分二”象征由太极分为天和地；“象三”，是指“分二”和“挂一”加在一起象征天、地、人，即所谓“三才”；“象四时”，是指“揲四”象征一年有四季；“象闰”是指“归奇于扐”象征古代历法中的闰月设置；“五岁再闰”则有再次变易重复归扐的象征意义。这些比附都是对揲算对应环节的易学解释，强调的是《周易》的道理“广大配天地，变通配四时”(语见《易传·系辞上》)，它们既不是对揲算环节做数学解释，其本身也没有数学意义。

6.“《乾》之策，二百一十有六”是说《乾》卦对应的策数为 216 策。这个数字的来源是 $36 \times 6 = 216$。按前述揲算规则，在第 3 次变易完成时，可能出现的揲得策数有 36、32、28、24 策四种情形，后面将对它们的获得情况做详细的介绍，这里是先引用所得结果。占筮家们特别关注 36 和 24 这两个数。按每揲 4 策计算，在第 3 次变易中揲取 9 次时所得策数即 36 策。9 是一个奇数，对应于阳爻。由于《乾》卦的 6 个爻符都是阳爻，当它们都是由揲得 36 策或者都由结果数 9 所确定时，涉及策数为卦象确定情况中最多的一种，共有 $36 \times 6 = 216$ 策。

7.“《坤》之策，百四十有四”是说《坤》卦对应的策数为 144 策。这个数字的来源是 $24 \times 6 = 144$。按每揲 4 策计算，在第 3 次变易中遇到揲取 6 次时，所得策数即 24 策。6 是一个偶数，对应于阴爻。由于《坤》卦的 6 个爻符都是阴爻，当它们都由揲得 24 策或者都由结果数 6 所确定时，涉及策数是卦象确定情况中最少的一种，即 $24 \times 6 = 144$ 策。也许由于这个原因，占筮家们称阳爻为“九”，而称阴爻为“六”。

8.“凡三百有六十，当期之日”是将《乾》之策和《坤》之策相加，得 $216 + 144 = 360$，这个数正好是一年 365 天的概数。

9.“二篇之策，万有一千五百二十，当万物之数也。”64 个卦象一共有 $6 \times 64 = 384$ 个爻符，其中阳爻和阴爻必定各占一半，即各有 192 爻。占筮家们视阳爻为 9，阴爻为 6，再考虑揲数 4，可得阳爻之策数为 $9 \times 4 \times 192 = 6912$，阴爻之策数为 $6 \times 4 \times 192 = 4608$。两个策数相加，得 $6912 + 4608 = 11520$。对古人来说，这已是一个不小的数字，象征着世间万物。

按这种方法揲算 3 轮得到的八卦只是“小成”，扩展到揲算 6 轮，演绎出六十四卦以后，则“天下之能事毕矣”。

这套算法是如此神奇和富于变化，以至于孔子说：“通晓变易之道的人，可以探知神祇的意图！”

《易传·系辞上》所载的这段文字，对揲算操作要点的概括极为凝练，而且对各个环节都做了易学比附，不像是对新近才发明的算法的推介说明。从行文特点上看，重点是从易学角度对揲算要点进行引申解释，并通过易数的衍绎，着重宣讲易道的“广大悉备”（语见《易传·系辞上》），而不在于介绍揲算本身。这种与传文性质相符合的做法似乎表明，揲算定型为传世形态的时期，应远在《易传·系辞》成书以前。笔者推测揲算定型的时期应不迟于西周晚期，当为西周占筮家们的发明。

在目前所知的各种古代《周易》文本中，不论经文还是传文，都不专门介绍占筮操作规则和具体仪式，前引"大衍之数"章的内容，是传文中涉及筮法的极少例外。这一珍贵的记载是历代学者研究《周易》占筮和我们研究西周数学的基础材料。由于周王室的信奉，孔夫子的喜好，左丘明的载述，秦始皇的不禁，汉武帝的尊崇，《周易》占筮和易学研究在中国的传统文化中占有较高的地位。因而其经文、卦象和揲算方法在传世的过程中，自春秋以降几乎没有发生变化，尤其是唐初学者孔颖达在《周易正义》中做了注疏，南宋学者朱熹和蔡元定在《易学启蒙》和《筮仪》中亦有详细说明，使后人对揲算的基本规则有着相当完整的了解。所以朱伯崑先生认为：

> 据《周易》称阳阴二爻为九六，以及《左传》对筮法的解释，如区分本卦和之卦，《易传》提出的揲蓍成卦说，是大体可信的。[3]

3.1.2 孔颖达和朱熹对揲算的疏注

唐贞观十六年，即公元642年，孔颖达作《周易正义》，他在疏文中对《易传·系辞上》"大衍之数"章所载的揲算成卦过程做了详细的解释，并记录了一种枚举出所有可能出现情形的方法，用来证明揲算是万无一失的成卦算法。

孔疏曰："初一揲，不五则九，是一变也。第二揲，不四则八，是二变也。第三揲，亦不四则八，是三变也。"

南宋淳熙丙午（公元1186年），朱熹和蔡元定作《易学启蒙》，其中"明蓍策"章对孔疏做了进一步的注解，并用黑点构图为示（图3-1），使揲算过程更加清晰明白："（第1变的挂扐策数）得五者三，得九者一。（第2变和第3变的挂扐策数均为）

得四者二，得八者二。”

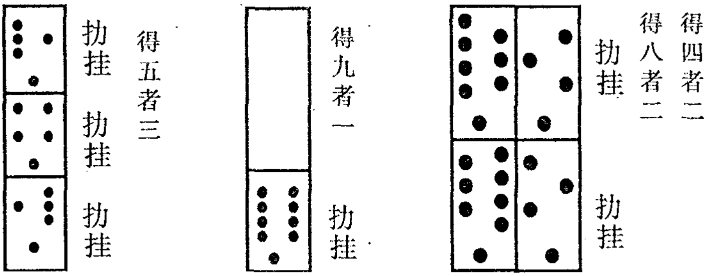


图3－1 《易学启蒙》中的挂扐策数示意图

结合“大衍之数”章，将孔、朱疏注释为白话，即：

1. 第1次变易。对49策做四营。不论分2时分成什么样子，归扐的策数一共只有以下四种可能出现的情形：

(1)挂1，一堆余1，另一堆必余3，共归扐5策；

(2)挂1，一堆余2，另一堆必余2，共归扐5策；

(3)挂1，一堆余3，另一堆必余1，共归扐5策；

(4)挂1，一堆余4，另一堆必余4，共归扐9策。

孔疏“不五则九”，所说即第1变时，归扐的策数有5策或9策两种情况。而朱注“得五者三，得九者一”，所说共有四种归扐情形，其中归扐5策的有三种，而归扐9策的只有一种。

相应地，在第1次变易后揲得的策数也有两种可能。当归扐5策时，揲得策数就是49－5＝44策；当归扐9策时，揲得策数则是49－9＝40策。它们必然是揲策数4的整数倍。这两种策数都将进入第2次变易。

2. 第2次变易。对44或40策做四营。不论分2时分成什么样子，归扐的策数都只有以下四种可能出现的情形：

(1)挂1，一堆余1，另一堆必余2，共归扐4策；

(2)挂1,一堆余2,另一堆必余1,共归扐4策;

(3)挂1,一堆余3,另一堆必余4,共归扐8策;

(4)挂1,一堆余4,另一堆必余3,共归扐8策。

孔疏"不四则八",所说即第2次变易时,归扐的策数有4策或8策两种情况。而朱注"得四者二,得八者二",是说在四种可能出现的归扐情形中,归扐4策和归扐8策的情形各占两种。

相应地,第2次变易结束后,可能出现的揲得策数有四种:

44策时,有44-4=40、44-8=36两种;

40策时,有40-4=36、40-8=32两种。

或者说揲得的策数将有40策、36策和32策三种可能的情形,它们同样必定是揲策数4的整数倍。

3.第3次变易。对40、36或32策做四营,不难验证它们的归扐策数都"不四则八",而且都是"得四者二,得八者二"。相应地,第3次变易之后的揲得策数就有下面六种可能出现的情形:

40策时,有40-4=36、40-8=32两种;

36策时,有36-4=32、36-8=28两种;

32策时,有32-4=28、32-8=24两种。

不计重复的策数,揲得的策数将有36策、32策、28策和24策四种可能的情形。

最后,将揲得的策数分别除以揲数4,得:

36÷4=9、32÷4=8、28÷4=7、24÷4=6。

这就是揲算完成后,可能得到的四种结果数。将揲算结果数转化为卦象的规则是:得奇数9、7时画出阳爻,得偶数8、6时画出阴爻。因而完成包含3次变易的一轮揲算一定能定出一个爻符,这个爻符可能是阳爻,也可能是阴爻。在《周易》占筮中,第一轮揲算得到的爻符画在最下面,以后依次向上画,直到画满6个爻符,即得出一个卦象。

显然,孔、朱所载既是揲算过程的详解,又对揲算算法的正确性给出了一种验证性质的证明。正是基于这种验证,古代占筮家们知道这是一种万无一失的算法,可以放心地用于成卦计算,只要操作上不出差错,一定能够得到 64 种卦象中的某一个卦象。

从数学上看,上述的验证证明是通过逐一枚举出所有可能出现情形的方法完成的,在八卦和六十四卦的构成中,我们已看到了这种思路的另外一种应用形态。笔者认为这是在古人数学思维逐渐发展的过程中出现的一种典型的论证方法,不妨称之为全举法。即:将所有可能出现的情形全部枚举出来的论证方法。在中国古代数学史的研究中,将这种思路及论证方法概括为全举法,有时是很方便的(参看本书 8.4.2)。

3.2 揲算研究概况

用现代数学理论和从数学史的角度研究《易》占揲算,大体上有以下几方面的内容:

1. 用现代数学理论解读以《易》占揲算为算例的一般性揲算命题;

2. 用现代数学理论计算《易》占揲算结果数的出现概率,以及与之相关的一些随机现象的出现概率;

3. 对传世揲算的定型过程和定型时期进行合理的推测;

4. 对传世揲算的数学特征进行归纳和分析;

5. 研究结果的应用。

3.2.1 《易》占揲算是初等数论中的一则特殊真命题

本书将对上述课题进行尝试性的探讨,希望通过对揲算中蕴含的数学问题的讨论,丰富我们对西周占筮和相关数学内容

的了解，为传统文化的研究和中国古代数学史的研究提供一些参考。当然，揲算中的数学问题应不止此，本书所涉只是其中的一部分。

在本书中，"揲扐算法"一词有两个层面上的用法。一是指《周易》占筮中使用的成卦算法，此时，揲扐算法属于一种特殊命题；二是指《周易》揲算模式下的一般性算法，此时，揲扐算法是一则一般性的数学命题。所谓一般性，具体地说，是将参揲策数表为揲策数、变易次数和结果数的函数。相对于一般命题而言，《易》占揲算只是在分 2 挂 1 条件下，参揲策数为 49，揲策数为 4，变易次数为 3 和结果数为 6、7、8、9 的一个具体算例。本书第 4 章给出了一般命题的一种表述形式，并用相关的数学方法证明了所做命题的正确性。这个结果证实了一般性揲算命题的存在性。当然，笔者所得到的只是一种表述形式，是否还存在其他形式，或者说，关于一般性揲算命题的归纳是否具有惟一性，还是一个有待研究的问题。

从相关的命题归纳情况来看，揲算命题属于现代数学中的初等数论范畴。根据孔颖达的注疏，已经确知古代占筮家们用全举法对《易》占揲算进行了严格的验证，因而它是一则真命题。这个结论通过对一般性命题的证明，也得到了证实。所以，可以认为《易》占揲算是初等数论中的一则特殊真命题。

3.2.2 揲算研究的大概情况

《易传》"大衍之数"章关于揲算的记载十分珍贵，是历代学者研究《周易》占筮和西周数学的重要材料之一。虽然相关文字对揲算操作要点的概括极为凝练，但却相当准确和基本完整，在掌握具体占筮操作方法的条件下，一般可以做出正确的理解，不会产生歧义。从《尚书》和《周礼》的记载中，所涉卜筮之术主

要控制于王室贵族的情况来看，西周时期周人使用的《周易》占筮并无广泛的流传。而《左传》、《国语》、《诗经》、《易传》以及诸子著述等文献则显示在东周时期，即春秋战国时期，《周易》占筮已广泛流传于各诸侯国的王室及民间。从此以后，人们对《周易》的应用便传承不绝，一直延续至今。在这个过程中，从孔子开始，研究《周易》的学者也是层出不穷，他们出自不同的目的，研究的内容也各有所异，但大体说来，几乎都集中于易学、哲学、史学和文学等范畴，而从数学角度展开研究的人则相对很少。因此，从数学的角度对揲算研究情况的概括显得比较容易把握一些，可以大致地划分成下述几个阶段：

1. 第一阶段。古代占筮家们完成了《易》占揲算的发明和定型。这是一个从原始占筮算法发展为揲算的漫长过程。毫无疑问，古代关于数的概念、计数及数算的出现是筮算产生和发展的基础，而筮算的应用和改进又促进了古人对数及算法的驾驭能力。古代占筮家们对筮算的研究与当时人们掌握的数学知识，有着直接的关联，他们依据经验的积累和实际的筮算摸索，逐渐找出揲算这样一种特殊的算法模式，最后完成了改进定型的工作。在这个阶段中，古代占筮家们涉及的都是各式各样的特殊命题，绝无先建立一般性命题，再从中选出适用算法的可能。他们能够在所构建的算法模式中找到一种最为合适的成卦算法，而且是一则真命题，已经是一件非常不可思议的事情了。

2. 第二阶段。春秋战国时期的占筮家们对西周前辈们发明的揲算方法似乎非常满意，因而在算法设计上并无实质性的改进或调整，只是随着易学的发展，将与揲算相关的一些数据引申为各种“易数”，使人们对数的神秘崇拜有了更为丰富的内容和想象空间。通过对《易传》中出现的各种易数的分析，除了与揲算直接相关的内容，这些易数几乎没有一个可以作为数学解释

而有助于人们了解揲算。易数的出现是这个阶段的主要特点，其产生的背景和实际效果都与《周易》占筮的广泛使用有关，对充实易学内容有明显的作用。这个阶段一直延伸到汉代，形成了所谓的“汉易”。在秦汉时期，占筮家们的思路大有拓展，在他们手上《周易》已然成了一部古代传下来的百科全书，并在易学的框架下，形成了象数派和义理派两个主要的易学流派。但是他们关心的“数”基本上都是易数，而不是对揲算的数学研究。尽管汉代的数学家们几乎个个都是占筮家，甚至是易学家，然而他们对揲算的研究仍未超出易数的范围。另一方面，他们还常将数学研究中取得的成果与易数联系在一起，比如张衡对球体体积的计算，就被视为是“协其阴阳奇偶”（语见《九章算术注·卷四》）的结果，这里的“阴阳奇偶”指的就是易数。三国时期，魏国的数学家刘徽作《九章算术注》。在中国古代数学史上，这是一部极为重要的著作。他在序中说：“昔在包牺（伏羲）氏，始画八卦，以通神明之德，以类万物之情。作九九之术，以合六爻之变。”认为易数是数学的渊源。汉代独尊儒术，列《周易》为五经之首。与经文和卦象一样，揲算亦属经典，已无调整改动的可能，易数也因此显得神圣而不可逾越。《汉书·律历志第一上》以及东汉学者王充的《论衡》等书都曾论及揲算，但多属易学范围，均与数学无关。

3. 第三阶段。北周数学家甄鸾著有《五经算术》一书，称揲算为“《周易》策数法”，作“待算乃明者列之”（语见《四库全书·五经算术·提要》）。《五经算术》中说：“三十六策然后得九一爻，二十四策然后得六一爻。十八变者，三变而成爻，十八变而六爻也。”这是目前所知关于揲算的最早的注解。此后有多种关于《易传·系辞上》所载“大衍之数”章揲算规则的注解，其中以唐贞观十六年，即公元 642 年，孔颖达在《周易正义》中对

揲算的全举法验证，以及南宋淳熙十三年，即公元1186年，朱熹和蔡元定在《易学启蒙》中对揲算的注释影响最大。这个阶段的特点是对《易传》所载揲算做注疏解释，使后人对揲算规则有了明确的了解。尤其是有关全举验证的记录，显示出古代占筮家把握揲算数学正确性的一种途径，为后人的相关研究提供了重要的材料。

4. 第四阶段。南宋淳祐七年，即公元1247年，数学家秦九韶作《数书九章》。该书共录算题九类八十一题，其中第一类为“大衍”，第一题为“蓍卦发微”。秦氏在该书的序中说：“独大衍法不载九章，未有能推之者，可不求其故哉?”是说汉代成书的《九章算术》中没有记载揲算，也从来没有人能推演出揲算的一般性算法，他有心讨论这个问题。秦氏在大衍类中提出了著名的“大衍求一术”。这是一种求解形如 $aX \equiv 1 \pmod b$ 的一次同余方程组的一般性算法，秦氏认为可以用它来解读揲算，称：“圣有大衍，微寓于《易》。奇余取策，群数皆捐。衍而究之，探隐知原。”但是秦氏所释与孔、朱疏注均不相同，他的做法是：

> 凡揲蓍求一爻之数，欲得一、二、三、四。出于无为，必令揲者不得知。故以四十九蓍，分之为二。只用左手之数，假令左手分得三十三，自一一揲之，必奇一，故不繁揲，乃径挂一。故《易》曰：“分而为二以象两，挂一以象三。”次后，又令筮人以二二揲之，其三十三，亦奇一，故归奇于扐。又令之以三三揲之，其三十三必奇三，故又归奇于扐。又令之以四四揲之，又奇一，亦归奇于扐。与前挂一，并三度揲，通有四扐，乃得一、一、三、一。……术意：谓揲二、揲三、揲四者，凡三度，复以三十三从头数揲之，故曰：“三变而成爻”；既卦有六爻，必一十八变，故曰：“十有八变而成卦。”

在这里传世揲算中的“揲之以四”被改为四种揲策方式，而且是只对左手分得的一堆做揲1、揲2、揲3和揲4，并对奇余之策归扐。单从这种对传世揲法规则的改动，不用说与之相关的其他算法过程，就已能判断秦氏算法不再是《易》占算法。从占筮术的角度看，秦氏实际上是发明了另外一种可供《易》占起卦的算法。不过当时及后来的占筮家们并没有采用秦氏的算法求占。至于秦氏这样做的目的，可能并不在于依托《周易》来推介他的“大衍求一术”，而在于他“愿进之于道”（语见《数书九章·序》），即他有为《周易》揲算建立一般性算法的数学追求或意愿。虽然用传统数学方法建立一般性的揲算算法规则的尝试仅秦九韶一人，而且并不成功，但从揲算研究来说，却是一个重要阶段的代表。

5. 第五阶段。用现代数学的相关理论和方法研究揲算的特殊性命题和一般性命题，是这一阶段的主要特征。笔者所知有限，仅以下述诸例作为说明：

1984年，侨居比利时的华裔学者沈宜甲先生作《科学无玄的周易》一书，提及他“于一九三七年曾见《中国科学》杂志载有一文，系以近代之高次方程式代数学方法注释易经”。[4]但未介绍具体内容，不知是对特殊命题还是对一般命题提出的数学研讨见解。沈先生本人则在该书的序言中说：“根据古人原理，我已觅出代数公式数十，周期律数百，表格一百余个，计算万、千。”对揲算命题做了许多分析讨论，并从一般性命题的角度，给出了一些“易经之数理基本公式”。[5]不过，关于一般性的揲算命题，沈先生并没有得到完整准确的数学描述。

1987年，罗见今先生在《数书九章与周易》一文中介绍了用同余符号表出的揲算特例和“分揲定理”。[6]罗先生的研究成果于1998年载入吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一

卷》,现将相关内容引述如下:

第一变有必要详加分析。借用数学上的同余符号“≡”来表示,揲法是以4为模余数为1,2,3,4(注意不包括零而包括4)的运算,下面标明“$\dot{\equiv}$”以示区别:$R \dot{\equiv} r(\mathrm{mod}\ 4)$, $0 < r \leqslant 4$.

大衍之数五十,其用四十有九	$50 - 1 = 49 = R$
分而为二,(以象两)	$R = R_1 + R_2$
挂一(以象三)	$(R_1 - 1) + R_2 = 48$
揲之以四,(以象四时)	
	$R_1 - 1 \dot{\equiv} r_1(\mathrm{mod}\ 4)$
	$R_2 \dot{\equiv} r_2(\mathrm{mod}\ 4)$
归奇于扐,(以象闰)	$r_1 + r_2 = 4$ 或 8
	$1 + r_1 + r_2 = 5$ 或 9

通过以上步骤能否保证“初一揲不五则九”?即第一变后所余蓍数40或44均为4的倍数是否必然的?经分析可知,这一结果在数学上是确定的。

引理:若$a \equiv b, a_1 \equiv b_1(\mathrm{mod}\ m)$,则$a \pm a_1 \equiv b \pm b_1(\mathrm{mod}\ m)$。

分揲定理:已知$R = R_1 + R_2 (R, R_1, R_2 \in \mathrm{N})$,若$R \equiv r(\mathrm{mod}\ m)$,$R_1 \equiv r_1(\mathrm{mod}\ m)$,

$R_2 \equiv r_2(\mathrm{mod}\ m)$,则

$$r_1 + r_2 = \begin{cases} r \text{ 或 } m + r (r \neq 0) \\ r \text{ 或 } m\ (r = 0) \end{cases}$$

证明:将$R_1 \equiv r_1(\mathrm{mod}\ m)$和$R_2 \equiv r_2(\mathrm{mod}\ m)$相加,由引理,$R = R_1 + R_2 \equiv r_1 + r_2(\mathrm{mod}\ m)$。

已知$R \equiv r(\mathrm{mod}\ m)$,与上式相减,由引理知$r_1 + r_2 \equiv r(\mathrm{mod}\ m)$。

亦即$r_1 + r_2 = km + r\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$。

由于$0 \leqslant r_1 \leqslant m$，$0 \leqslant r_2 \leqslant m$，即有$0 \leqslant r_1 + r_2 \leqslant 2m$，

由此 $k = 0$或1。

当$0 < r < m$时,$r_1 + r_2 = r$或$m + r$,

当$r = 0$时,$r_1 + r_2 = r$或m,证完。

具体到揲法的规定$0 < r, r_1, r2 \leqslant m$，可知

$$0 < r_1 + r_2 \leqslant 2m,$$

同样有 $k = 0$或1。

当$0 < r < m$时,$r_1 + r_2 = r$或$m + r$,

当$r = m$时，$r_1 + r_2 = m$或$2m$。

据分揲定理,$48 \equiv 4 \pmod 4$,这里$r = m = 4$,故必有$r_1 + r_2 = 4$或8,$1 + r_1 + r_2 = 5$或9,没有疑问了。

(6) 第二变揲法仿上(2) ~ (5),用蓍40或44根:

$40 = R_1 + R_2$	$44 = R_1 + R_2$
$(R1 - 1) + R_2 = 39$	$(R_1 - 1) + R_2 = 43$
$R_1 - 1 \equiv r_1 \pmod 4$	$R_1 - 1 \equiv r_1 \pmod 4$
$R_2 \equiv r_2 \pmod 4$	$R_2 \equiv r_2 \pmod 4$
$r_1 + r_2 = 3$ 或 7	$r_1 + r_2 = 3$ 或 7
$1 + r_1 + r_2 = 4$ 或 8	$1 + r_1 + r_2 = 4$ 或 8

此即所谓“第二揲,不四则八,是二变也”。据分揲定理,$39 \equiv 3 \pmod 4$,$43 \equiv 3 \pmod 4$,两者都有$r_1 + r_2 = 3$或7,故$1 + r_1 + r_2 = 4$或8,为不易之数。

罗先生还指出:

> 由于必须算出九、六、七、八四数,在揲法程序的规定下,入算的数R在正整数中必有一确定的范围。可以证明,它应满足$R - 1 = 4k + r (k = 11, r = 1,2,3,4)$,亦即$R$只能是46、47、48、49四数之一。[7]

这个结论已涉及一般性的揲算命题，但显然并不完备。比如 k 和 r 的取值是否还有其他选择就没有相关的界定。而且这个结论本身似乎也有问题，笔者尚不知道罗先生何以证明 46 这个数用于揲算时，保证能够得到 6、7、8、9 四种可能出现的结果数。因为用 46 策时，揲得的结果数只有 6、7、8 三种可能，永远得不出 9。为什么会这样，应是“分揲定理”讨论的内容，或者效仿古人的做法，用全举法便能予以验证。用全举法进行验证的关键在于第 1 次变易时，扐策数只有 6 策一种结果，表 3－1 给出了一部分全举计算的过程。而 49 策的情形，第 1 次变易时，扐策数有 5 策和 9 策两种可能(参看本书 3.1.2 节)。由于表 3－1 中的规律是一目了然的，故没有必要列出全部内容。

表 3－1 对 46 做分 2 挂 1 揲 4 时的扐策数分析(局部)

分堆策数	Ⅰ堆策数	1	2	3	4	5	6	7	8	……
	Ⅱ堆策数	45	44	43	42	41	40	39	38	……
从Ⅰ堆挂1	挂策数		1	1	1	1	1	1	1	……
	Ⅰ堆余策数		1	2	3	4	1	2	3	……
	Ⅱ堆余策数		4	3	2	1	4	3	2	……
	扐策数		6	6	6	6	6	6	6	……
从Ⅱ堆挂到Ⅰ	挂策数	1	1	1	1	1	1	1	1	……
	Ⅰ堆余策数	1	2	3	4	1	2	3	4	……
	Ⅱ堆余策数	4	3	2	1	4	3	2	1	……
	扐策数	6	6	6	6	6	6	6	6	……

显然，上述分析与下面的说法是等价的：对 46 策做分 2 挂 1 揲 4 时，归扐策数一共只有以下四种可能的情形：

(1)挂 1,一堆余 1,另一堆必余 4,共归扐 6 策;

(2)挂 1,一堆余 2,另一堆必余 3,共归扐 6 策;

(3)挂 1,一堆余 3,另一堆必余 2,共归扐 6 策;

(4)挂 1,一堆余 4,另一堆必余 1,共归扐 6 策;

结果表明,扐策数都等于 6 策,不可能得到其他策数。

尽管如此,罗先生与沈先生一样,在用现代数学方法研究一般性的揲算命题方面进行了有益的探索。

可以说,二千七百多年以来,揲扐算法作为成卦依据一直被用于《周易》占筮。作为特殊命题,古代占筮家们采用全举法对其正确性做出了验证,可知这是一种没有数学瑕疵的成卦算法。但是关于这种算法的一般性命题的研究还进展有限,不论是用中国古代的传统数学方法,还是用现代数学理论,至今都还没有取得令人满意的成果。以传世揲算为算例的揲扐算法一般性命题,已成为华夏祖先留待后人归纳和解读的最为古老的初等数论命题之一。对这一命题的探讨,是本书的核心内容。

关于《易》占揲算结果数出现概率的计算,属于古典概率的内容,只要弄清揲算规则和影响因素即可求出,并无数学上的困难。但是系统地讨论揲算中的概率计算的文献资料却不多见。本书通过理论计算建立的概率指标,也许能为一些相关的考古课题提供参考。

至于对传世揲算定型过程的探讨,以及对这种算法的数学特征进行归纳分析等方面的工作,在笔者见到的文献中基本未被涉及,因而本书所作,尚属尝试。

注释:

[1]彭涵梅:《大衍之数五十初探》,载刘大钧主编《大易集说》,巴蜀书社 2003 年 6 月版,第 120～130 页。

[2]宝鸡市博物馆、千阳县文化馆、中国科学院自然科学史研究所:《千阳县西汉墓中出土算筹》,《考古》1976(2),第85页。
[3]朱伯崑:《周易知识通览》,齐鲁书社1993年12月版,第6页。
[4]沈宜甲:《科学无玄的周易》,中国友谊出版公司1984年8月版,第1页。
[5]沈宜甲:《科学无玄的周易》,中国友谊出版公司1984年8月版,第160页。
[6]罗见今:《数书九章与周易》,载吴文俊主编《秦九韶与数书九章》,北京师范大学出版社1987年4月版,第93~96页。
[7]吴文俊主编:《中国数学史大系·第一卷》,北京师范大学出版社1998年9月版,第202~207页。

第4章　揲算命题的归纳和证明

本章的内容,是用现代数学方法,按《易》占揲算的模式归纳建立一般性的揲算命题,并证明其为真。在本章相关命题的证明中将使用数学归纳法原理的一元、二元和三元形式,为此,有必要先做一些准备工作。

4.1　一元、二元和三元数学归纳法的基本形式

在一个命题中,只对一个独立的正整数 A 做数学归纳法推证时,可以将该命题记为 $P(A)$。在一个命题中,对两个独立的正整数 A 和 B 做数学归纳法推证时,可以将该命题记为 $P(A,B)$。在一个命题中对三个独立的正整数 A、B 和 C 做数学归纳法推证时,可以将该命题记为 $P(A,B,C)$。这三种情形可称为数学归纳法原理的一元、二元和三元形式。

1. 一元情形。对命题 $P(A)$ 用数学归纳法原理进行推证的基本过程为:

① 验证:$P(1)$ 成立。

② 假定:$P(a)$ 成立。

若:$P(a+1)$ 成立;

则:$P(A)$ 成立。

2. 二元情形。对命题 $P(A,B)$ 用数学归纳法原理进行推证的基本过程为:

① 验证：$P(1,1)$ 成立。

② 假定：$P(a,1)$ 成立。

若：$P(a+1,1)$ 成立；

则：$P(A,1)$ 成立。

③ 假定：$P(A,b)$ 成立。

若：$P(A,b+1)$ 成立；

则：$P(A,B)$ 成立。

3. 三元情形。对命题 $P(A,B,C)$ 用数学归纳法原理进行推证的基本过程为：

① 验证：$P(1,1,1)$ 成立。

② 假定：$P(a,1,1)$ 成立。

若：$P(a+1,1,1)$ 成立；

则：$P(A,1,1)$ 成立。

③ 假定：$P(A,b,1)$ 成立。

若：$P(A,b+1,1)$ 成立；

则：$P(A,B,1)$ 成立。

④ 假定：$P(A,B,c)$ 成立。

若：$P(A,B,c+1)$ 成立；

则：$P(A,B,C)$ 成立。

4. 数学归纳法原理的一种变化形式：当某一命题中归纳推证的对象是从某个大于 1 的整数开始的所有正整数时，使用数学归纳法原理进行推证时，可将验证环节中这个独立正整数的取值由 1 改为符合取值要求的最小的那个正整数，而其余环节不变。数学归纳法的这种变化形式将用于后述相关命题的归纳推证。届时，揲策数的最小值为 $M=2$。

4.2 不挂一的揲扐计算(局部)

4.2.1 对几种参揲策数的全举法试算

为了找到一般性揲算命题的具体形式,不妨参考沈宜甲先生在《科学无玄的周易》一书中归结出的周期性特点[1],并根据《易》占揲算所用的49策这个参揲策数,选取46、47、48、49这几种策数做一些试算。注意到"挂一"环节对归纳揲算中最基本的数学关系干扰很大,因而分别对不"挂一"和有"挂一"两种情形都做了试算。所有试算都按分2、揲4、归扐、3次变易的程序操作,对各个步骤都用全举法思路进行分析。计算过程则按枝形关系写出,这样比较简洁。现以46策为例,试算如下:

1. 不挂1:全举分析表明,在第1次变易中,扐策数不2则6;在第2、3次变易中,扐策数均不4则8,故有:

$$
46\begin{cases}
46-6=40\begin{cases}40-8=32\begin{cases}32-8=24\\32-4=28\end{cases}\\[2ex]40-4=36\begin{cases}36-8=28\\36-4=32\end{cases}\end{cases}\\[6ex]
46-2=44\begin{cases}44-8=36\\[2ex]44-4=40\begin{cases}40-8=32\\40-4=36\end{cases}\end{cases}
\end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}
24\div4=6\\[2ex]
28\div4=7\\[6ex]
32\div4=8\\[6ex]
36\div4=9
\end{array}
$$

$$
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
$$

第1次变易　第2次变易　第3次变易　结果数为6、7、8、9

2. 有挂1:全举分析表明,在第1次变易中,扐策数为6(参见表3-1);在第2、3次变易中,扐策数均不4则8,故有:

$$46-6=40\begin{cases}40-8=32\begin{cases}32-8=24 & 24\div4=6\\ 32-4=28 & \end{cases}\\ & 28\div4=7\\ 40-4=36\begin{cases}36-8=28 & \\ 36-4=32 & 32\div4=8\end{cases}\end{cases}$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

1 变　　　2 变　　　3 变　　　结果数为 6、7、8

这个结果表明:46 策在不挂 1 的条件下可以用于《易》占成卦,而在有挂 1 的条件下,由于只能得到 6、7、8 三种结果数,因而不能用于《易》占。类似地,对 47 策、48 策和 49 策做试算,结果是 47、48 两种策数挂 1 或不挂 1 均可用于《易》占成卦,而 49 策时必须挂 1 才能使用(若不挂 1,结果数为 7、8、9,便不能用于《易》占成卦)。显然,47 和 48 这两种策数可以帮助我们绕开挂 1 环节,找寻一条建立一般性揲算命题的途径。但从便于建立函数关系的角度分析,选用 48 策比选用 47 策方便,因而后面的讨论没有选用 47 策。由此,本节的讨论具有局部性,完整情形见本书 4.4.1。

为了便于讨论,约定:参揲策数记为 T;一轮揲算所经过的变易次数记为 C;各次变易中统一采用的揲策数(它同时也是计算结果数时使用的除数)记为 M;每一轮揲算可能得到的若干结果数称为一个结果数组,后面将证明,结果数组可以记为 $\{R, R+1, \cdots\cdots R+C\}$ 的形式;在《易》占操作筹策进行计算的条件下,T、C、M、R 均为正整数。

4.2.2　不挂一的扐策定理(局部)

定理 1:当 $T = aM$ 策时,分 2 揲 M 后的扐策总数 $L = 2M$ 或 M。其中 $a \geqslant 3, M \geqslant 2$。

式中 L 有 $2M$ 或 M 两种取值,出现哪一种取决于分 2 的具体

情况，具有随机性。

正整数$a \neq 1$或$a \neq 2$的原因是：$a = 1$时，揲策总数必为零；$a = 2$时，揲策总数可能为零（另一种情况是可能为M）。在《周易》蓍筮的操作型计算中，只要出现揲策总数为零的情形，结果数等于$0 \div M = 0$，便没有揲算意义。

$M \neq 1$的原因是：当$M = 1$时，分2揲1的扐策总数恒等于2，不可能出现扐策数为1的情形，故$M = 1$时，虽然可做揲算，但定理1并不成立。

证明：将参揲策数T分2，可表为$T = T_1 + T_2$。

对T_1和T_2分别"揲M"可表为$T_1 = l_1 + pM, T_2 = l_2 + qM$。

因而$T = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p + q)M$。其中$p \geqslant 0, q \geqslant 0$，但不能同时为0。

显然，扐策总数$L = l_1 + l_2$。

按揲算规则，T_1和T_2的揲后余策l_1和l_2，必须满足$0 < l_1 \leqslant M$和$0 < l_2 \leqslant M$的要求；

故 $$0 < l_1 + l_2 \leqslant 2M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由于$T = aM$，可知M能整除T，记为$M \mid T$；

因而$M \mid l_1 + l_2 + (p + q)M$；

故 $$M \mid l_1 + l_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)和(2)的解为$l_1 + l_2 = 2M$或M。

即扐策总数$L = 2M$或M。

证毕。

4.2.3 不挂一的揲扐计算定理（局部）

1. 实算表明，$T = 48$、$M = 4$、$C = 3$时，不挂1揲算得到的结果数组为$\{6,7,8,9\}$，且三次变易中均有$L = 8$或4，符合定理1的结论。揲算过程可以枝形关系表示如下：

48	$48-8=40$	$40-8=32$	$32-8=24$	$24\div4=6$
			$32-4=28$	$28\div4=7$
		$40-4=36$	$36-8=28$	
			$36-4=32$	$32\div4=8$
	$48-4=44$	$44-8=36$		
		$44-4=40$	$40-8=32$	
			$40-4=36$	$36\div4=9$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	第 1 次变易	第 2 次变易	第 3 次变易,$(C=3)$	$\{6,7,8,9\}$,$(R=6)$

在此基础上,可逐步建立函数关系 $T=f(M,R,C)$。

首先,取 $C=3$,$R=6$,可构造 $T=f(M)=12M$,并得到引理 1。

引理 1:$T=12M$、$C=3$ 时,分 2 搛 M 的结果数组为 $\{6,7,8,9\}$。其中,$M\geqslant2$。

证明:对 M 使用数学归纳法。此时的命题形式为 $P(M)$,为一元情形。

① 验证:$P(2)$ 成立。

此时,$M=2$,有:$T=12M=24$。

根据定理 1,在 3 次变易中,均有扐策总数 $L=4$ 或 2 两种可能出现的情形,搛算过程可以枝形关系表示为:

24	20	16	12	$12\div2=6$
		18	14	$14\div2=7$
	22		16	$16\div2=8$
		20	18	$18\div2=9$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	1 变	2 变	3 变,$(C=3)$	$\{6,7,8,9\}$,$(R=6)$

结果数组的确为 $\{6,7,8,9\}$,故命题 $P(2)$ 成立。

② 假设:$M=m$ 时,命题 $P(m)$ 成立。

对于 $M = m + 1$，命题形式为 $P(m + 1)$ 有：

$T = 12M = 12(m + 1)$。

根据定理 1，在 3 次变易中，均有扐策总数 $L = 2(m + 1)$ 或 $(m + 1)$，揲算过程的枝形关系为：

$$
\begin{array}{lllll}
 & & 8(m+1)\{ & 6(m+1) & 6(m+1) \div (m+1) = 6 \\
 & 10(m+1)\{ & & 7(m+1) & 7(m+1) \div (m+1) = 7 \\
12(m+1)\{ & & 9(m+1)\{ & & \\
 & 11(m+1)\{ & & 8(m+1) & 8(m+1) \div (m+1) = 8 \\
 & & 10(m+1)\{ & 9(m+1) & 9(m+1) \div (m+1) = 9 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{6,7,8,9\},(R=6)
\end{array}
$$

结果数组确为 $\{6,7,8,9\}$，可知命题 $P(m + 1)$ 成立。

故引理 1 成立。

证毕。

2. 利用引理 1，取 $C = 3$，可构造 $T = f(M,R) = (R + 6)M$，并得到引理 2。

引理 2：$T = (R + 6)M$、$C = 3$ 时，对 T 分 2 揲 M 的结果数组为 $\{R, R + 1, R + 2, R + 3\}$。其中 $M \geqslant 2$。

证明：将引理 2 记为命题 $P(M,R)$，对独立正整数 M 和 R 的二元归纳法证明过程为：

① 验证：$P(2,1)$ 成立。

此时，$M = 2$、$R = 1$，因而 $T = (R + 6)M = (1 + 6) \times 2 = 14$。

根据定理 1，在 3 次变易中均有扐策数 $L = 4$ 或 2。揲算过程的枝形关系为：

$$\begin{array}{lllll}
 & & 6\{ & 2 & 2\div 2=1 \\
 & 10\{ & & & \\
 & & 8\{ & 4 & 4\div 2=2 \\
14\{ & & & & \\
 & 12\{ & & 6 & 6\div 2=3 \\
 & & 10\{ & 8 & 8\div 2=4 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 1\text{ 变} & 2\text{ 变} & 3\text{ 变},(C=3) & \{1,2,3,4\},(R=1)
\end{array}$$

所得结果数组的确是$\{1,2,3,4\}$，故命题 $P(2,1)$ 成立。

② 假定：$P(m,1)$ 成立。

对于 $P(m+1,1)$，有：

$T=(R+6)M=7(m+1)$。

根据定理 1，在 3 次变易中均有扐策总数 $L=2(m+1)$ 或 $(m+1)$ 两种可能出现的情形，因而摞算过程的枝形关系为：

$$\begin{array}{lllll}
 & & 3(m+1)\{ & (m+1) & (m+1)\div(m+1)=1 \\
 & 5(m+1)\{ & & 2(m+1) & 2(m+1)\div(m+1)=2 \\
7(m+1)\{ & & 4(m+1)\{ & & \\
 & 6(m+1)\{ & & 3(m+1) & 3(m+1)\div(m+1)=3 \\
 & & 5(m+1)\{ & 4(m+1) & 4(m+1)\div(m+1)=4 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 1\text{ 变} & 2\text{ 变} & 3\text{ 变},(C=3) & \{1,2,3,4\},(R=1)
\end{array}$$

所得结果数组确为$\{1,2,3,4\}$，故命题 $P(m+1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,1)$ 成立。

③ 假定：$P(M,r)$ 成立。

对于 $P(M,r+1)$，有：

$T=(R+6)M=(r+1+6)M=(r+7)M$。

根据定理 1，在 3 次变易中均有扐策数 $L=2M$ 或 M 两种可能出现的情形，因而摞算过程的枝形关系为：

$$
\begin{array}{llllll}
 & & (r+3)M\{ & (r+1) & (r+1)M \div M = r+1 = R \\
 & (r+5)M\{ & & (r+2)M & (r+2)M \div M = r+2 = R+1 \\
(r+7)M\{ & & (r+4)M\{ & & \\
 & (r+6)M\{ & & (r+3)M & (r+3)M \div M = r+3 = R+2 \\
 & & (r+5)M\{ & (r+4)M & (r+4)M \div M = r+4 = R+3 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \{r+1, r+2, r+3, r+4\}\text{或} \\
 & & & & \{R, R+1, R+2, R+3\},(R=r+1)
\end{array}
$$

所得结果数组确为 $\{r+1, r+2, r+3, r+4\}$,故命题 $P(M,r+1)$ 成立。

故命题 $P(M,R)$ 成立,即引理 2 成立。

证毕。

3. 利用引理 2,可构造 $T = f(M,R,C) = (R+2C)M$,并得到下述定理。

定理 2:$T = (R+2C)M$ 时,可以对 T 进行分 2 揲 M 的揲扐计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R, R+1, \ldots\ldots, R+C\}$。其中,$M \geqslant 2$。

证明:对独立正整数 M、R 和 C 使用数学归纳法。

将定理 2 记为命题 $P(M,R,C)$,关于 M、R 和 C 的三元归纳法证明过程为:

① 验证:$P(2,1,1)$ 成立。

此时,$M = 2$、$R = 1$、$C = 1$,有:

$$T = (R+2C)M = (1+2\times1)\times2 = 6。$$

根据定理 1,在这次变易中扐策数 $L = 4$ 或 2,因而揲算过程的枝形关系为:

$$6\begin{cases}6-4=2 & 2\div 2=1\\ 6-2=4 & 4\div 2=2\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ 1\text{ 变},(C=1) & \{1,2\},(R=1)\end{cases}$$

所得结果数组的确是$\{1,2\}$,故命题 $P(2,1,1)$ 成立。

② 假定:$P(m,1,1)$ 成立。

对于$P(m+1,1,1)$ 有:

$$T=(R+2C)M=(1+2\times 1)(m+1)=3(m+1)。$$

根据定理1,在这次变易中扐策总数$L=2(m+1)$或$(m+1)$,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形关系为:

$$3(m+1)\begin{cases}(m+1) & (m+1)\div(m+1)=1\\ 2(m+1) & 2(m+1)\div(m+1)=2\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ 1\text{ 变},(C=1) & \{1,2\},(R=1)\end{cases}$$

所得结果数组的确是$\{1,2\}$,故命题 $P(m+1,1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,1,1)$ 成立。

③ 假定:$P(M,r,1)$ 成立。

对于$P(M,r+1,1)$,有:

$$T=(R+2C)M=(r+1+2\times 1)M=(r+3)M。$$

根据定理1,在这次变易中扐策总数$L=2M$或M,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形关系为:

$$(r+3)M\begin{cases}(r+1)M & (r+1)M\div M=r+1=R\\ (r+2)M & (r+2)M\div M=r+2=R+1\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ 1\text{ 变},(C=1) & \{r+1,r+2\},(R=r+1)\\ & \text{或}\{R,R+1\}\end{cases}$$

结果数组确为$\{r+1,r+2\}$,故命题 $P(M,r+1,1)$ 成立。

故命题 $P(M,R,1)$ 成立。

④ 假定:$P(M,R,c)$ 成立。

对于$P(M,R,c+1)$ 有:

$$T=(R+2C)M=[R+2(c+1)]M。$$

根据定理 1,在 $c+1$ 次变易中均有扐策总数 $L=2M$ 或 M,有两种可能出现的情形,揲算过程的枝形图可表示为:

$$T\begin{cases}T-2M\begin{cases}T-4M\begin{cases}T-6M\cdots\\T-5M\cdots\end{cases}\\T-3M\end{cases}\\T-M\begin{cases}T-3M\\T-2M\begin{cases}T-4M\cdots\\T-3M\cdots\end{cases}\end{cases}\end{cases}\qquad\begin{cases}T-2cM\begin{cases}T-(2c+2)M\\T-(2c+1)M\end{cases}\\\quad\vdots\qquad\qquad\vdots\\T-cM\begin{cases}T-(c+2)M\\T-(c+1)M\end{cases}\end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc}\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1\text{变}&2\text{变}&3\text{变}&c\text{变}&c+1\text{变},\ (C=c+1)\end{array}$$

用 M 去除最后的揲策总数,得:

$[T-(2c+2)M]\div M=[R+2(c+1)-(2c+2)]M\div M=R$;

$[T-(2c+1)M]\div M=[R+2(c+1)-(2c+1)]M\div M=R+1$;

……;

$[T-(c+2)M]\div M=[R+2(c+1)-(c+2)]M\div M=R+c=R+C-1$;

$[T-(c+1)M]\div M=[R+2(c+1)-(c+1)]M\div M=R+c+1=R+C$ 。

所得结果数组确为$\{R,R+1,\ldots\ldots,R+c+1\}$,故命题 $P(M,R,c+1)$ 成立。

故命题 $P(M,R,C)$ 成立,即定理 2 成立。

证毕。

4.3　有挂一的揲扐计算

设置挂1操作后，使揲扐计算的数学规律变得复杂一些，但可以在定理1和定理2的基础上推广得到相关的结果，从而对《周易》占筮模式下揲扐算法的一般性命题的具体形式做出一种归纳，并证明其为真命题。

4.3.1　有挂一的扐策定理

定理3：参揲总策数$S = T + K = (R + 2C)M + K$时，分2挂1揲$M$后，扐策总数$L = 2M + K$或$M + K$。其中$(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$；当$C = 1$时，$M \geqslant 2$；当$C > 1$时，$M \geqslant 3$；$K$为整数。

L有两种可能的取值，缘于对S进行分2的随机性。

对任何$C > 0$，$M \neq 1$的原因是$M = 1$时，$L = 3$，本定理不能成立。

$C > 1$时，$M \neq 2$的原因是进入第2次变易后，若$M = 2$，则$L = 4$，由于不会出现第二种数值，本定理亦不能成立。

证明：对K使用数学归纳法。

分析：由$(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$，可知：

$M = 2$时，$K = 1$；

$M = 3$时，$K = 0,1$；

$M = 4$时，$K = -1,0,1$；

……；

$M = m$时，$K = 3 - m, 4 - m, \cdots\cdots, 0, 1$。

即K的取值由M决定，故对K作数学归纳法推证时，必与M相关。

1. 验证：对任意的$M \geqslant 2$或$M \geqslant 3$，取$K = 1$时，$S = T + 1$。

从“分二”和“挂一”都具有随机性的规则来看，先分2后挂1和先挂1后分2在数学上是等价的。故分2挂1揲M的操作可表为挂1分2揲M的形态。

即$S-1=T=T_1+T_2=l_1+l_2+(p+q)M$。

其中$T_1=l_1+pM$，$T_2=l_2+qM$。其中$p\geqslant 0$，$q\geqslant 0$，但不能同时为0；

且$0<l_1\leqslant M$，$0<l_2\leqslant M$；

故$0<l_1+l_2\leqslant 2M$。 ……(1)

又因$T=(R+2C)M$，可知M能够整除T，记为$M|T$。

由$T=l_1+l_2+(p+q)M$，

故$M|l_1+l_2$。 ……(2)

(1)和(2)的解为$l_1+l_2=2M$或M。

有挂1时，扐策总数L中还应计入挂出的1策，

于是$L=l_1+l_2+1=2M+1$或$M+1$。命题成立。

2. 假设：$M=m$，取$K=k=3-m$时，命题成立。

注意到K的取值方向与M相反，对于$M=m+1$，K在负方向上的相应取值为：

$K=3-(m+1)=2-m$。

此时，$S=T+K=T+(2-m)$。

故挂1分2揲M的操作可表为：

$S-1=T+(2-m)-1=T+1-m=T_1+T_2=l_1+l_2+(p+q)(m+1)$。

可得$T=T_1+T_2+(m-1)=l_1+l_2+(m-1)+(p+q)(m+1)$。

其中$T_1=l_1+p(m+1)$，$T_2=l_2+q(m+1)$；

且$0<l_1\leqslant(m+1)$，$0<l_2\leqslant(m+1)$；

可得$0<l_1+l_2\leqslant 2(m+1)$。

故 $0 < l_1 + l_2 + (m-1) \leqslant 3m+1 = 3(m+1)-2$。
$\cdots\cdots(3)$

又因 $T = (R+2C)(m+1)$;

可知 $(m+1)|T$;

故 $(m+1)|l_1 + l_2 + m - 1$。　　$\cdots\cdots(4)$

(3)和(4)的解为 $l_1 + l_2 + (m-1) = 2(m+1)$ 或 $(m+1)$。

即 $l_1 + l_2 = 2(m+1) + (1-m)$ 或 $(m+1)+(1-m)$。

加上挂出的1策,得:.

$L = l_1 + l_2 + 1 = 2(m+1) + (2-m)$ 或 $(m+1)+(2-m)$。

即扐策总数 $L = 2M + K$ 或 $M + K$。

故定理3成立。

证毕。

在以 M 为周期的条件下,K 值的个数应有 M 个,(其中有一个是0)而定理3的约束条件中,K 的取值只有 $M-1$ 个,所缺的这个值可取为 $K=2$(另一种可行的取法是取 $K = 2-M$)。这是因为 $K=2$(或者 $K=2-M$)时,定理3并不成立,相关情形须由定理4描述。

定理4:参揲总策数 $S = T+2 = (R+2C)M+2$ 时,分2挂1揲 M 之后,扐策总数

$L = M + 2$。其中,$M \geqslant 1$。

证明:对于 $S = T+2$,分2挂1揲 M 的操作可表为:

$$S - 1 = T + 1 = T_1 + T_2 = l_1 + l_2 + (p+q)M;$$

其中 $T_1 = l_1 + pM$, $T_2 = l_2 + qM$,其中 $p \geqslant 0, q \geqslant 0$,但不能同时为0。

由 $0 < l_1 \leqslant M$, $0 < l_2 \leqslant M$;

可得 $0 < l_1 + l_2 \leqslant 2M$;

故 $0 < l_1 + l_2 - 1 < 2M$。　　$\cdots\cdots(1)$

又因 $T = (R + 2C)M$,可知 M 能够整除 T,记为 $M\ T$ 。

由 $T = T_1 + T_2 - 1 = l_1 + l_2 - 1 + (p + q)M$;

可得 $M \mid (l_1 + l_2 - 1)$。 …… (2)

(1) 和(2) 的解为 $l_1 + l_2 - 1 = M$,即 $l_1 + l_2 = M + 1$ 。

加上挂出的 1 策,得扐策总数 $L = l_1 + l_2 + 1 = M + 2$ 。

证毕。

显然,取 $K = 2 - M$ 时,有

$S = T + 2 - M = (R + 2C - 1)M + 2$,所得结论与定理4是等价的。

4.3.2 一般性揲算命题的归纳和证明——有挂一的揲扐计算定理

定理5:参揲总策数 $S = T + K = (R + 2C)M + K$ 时,可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分2挂1揲 M 的计算,经过 C 次变易后的结果数组为:$\{R, R+1, \ldots\ldots, R+C\}$。其中,$(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$;$C = 1$ 时,$M \geqslant 2$;$C > 1$ 时,$M \geqslant 3$。

本定理可用证明定理2的类似方法予以证明,故从略。证明过程中,各次变易的扐策总数 L 应根据定理3确定,并注意到从第2次变易起,均有 $K = 0$。

定理6:参揲策数 $S = T + 2 = (R + 2C)M + 2$ 时,可以按《周易》占筮的揲扐计算模式,进行分2挂1揲 M 的计算,经过 C 次变易后的结果数组为$\{R + 1, R + 2, \cdots\cdots, R + C\}$。其中,$M \geqslant 2$。

本定理可用证明定理2的类似方法予以证明,故从略。证明过程中,第1次变易的扐策总数 L 应根据定理4确定,而此后各次变易的扐策总数 L 均应根据定理3确定,并注意到 $K = 0$。

定理5和定理6便是一般性揲算命题的一种具体形式。由此可知一般性揲算命题是存在的,但一般性揲算命题是否还有其

他的具体形式，仍有待研究。

4.3.3　计算实例

实例 1：《周易》占筮使用的揲算参数为：$S = 49$ 策、分 2、挂 1、$M = 4$、$C = 3$、$R = 6$。可以用定理5 证明《周易》揲算方法的正确性。

由定理5，参揲总策数为 $S = T + K$。其中，$T = (R + 2C)M = (6 + 2 \times 3) \times 4 = 48$ 策。由 $(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$ 给定的约束条件，可知 $M = 4$ 时，$K = -1, 0, 1$。表明参揲策数 S 取为47、48 或49 策时，均可用于分 2 挂 1 揲 4 的计算，经 3 次变易后，可能出现的结果数都是6、7、8 或 9，因而这三种参揲策数都能满足揲算成卦的需要。在实际应用中，《周易》筮法选定 49 策作为参揲策数，而没有选 47 策或 48 策。

古代占筮家用全举法对《易》占揲算的正确性进行了验证。现在，本书用现代数学的演绎论证方法，证明了《易》占揲算的确是一则特殊真命题。

实例 2：西汉杨雄创制的《太玄》是模仿《周易》的卦占方法之一。其卦象由"——"、"— —"和"---"3 种爻符构成，4 爻成卦，因而共有 $3^4 = 81$ 种卦象。求取爻符的算法为：总策数为 33 策（即 $S = 33$），分 2 挂 1 揲 3（即 $M = 3$），两变成爻（即 $C = 2$），所得结果数组为 $\{7, 8, 9\}$（即 $R = 7$）。这三种可能的结果数正好对应于 3 种爻符。经 4 轮揲算共 8 次变易即可确定一个卦象。

不难验证 $T = (R + 2C)M = (7 + 2 \times 2) \times 3 = 33$ 策。

由约束条件 $(3 - M) \leqslant K \leqslant 1$，知 $K = 0$ 或 1。《太玄》取 $K = 0$，即 $S = T + K = 33$ 策，符合定理 5 的条件。

根据定理 3，在两次变易中均有扐策总数 $L = 6$ 或 3。

确定一个爻符的一轮揲算过程的枝形图如下：

	27	21	$21 \div 3 = 7$
33		24	$24 \div 3 = 8$
	30	27	$27 \div 3 = 9$
	⋮	⋮	⋮
	1 变	2 变,($C = 2$)	$\{7,8,9\}$,($R = 7$)

实例 3:取 $M = 16$、$C = 4$、$R = 1$,得 $T = (1 + 2 \times 4) \times 16 = 144$ 策。若选取 $K = 3 - M = 3 - 16 = -13$,得 $S = T + K = 144 - 13 = 131$ 策。根据定理 5,可以对 131 策进行揲扐计算。

由定理 3,第 1 变中扐策总数 L 为 $(2M + K) = 32 - 13 = 19$ 策,或 $(M + K) = 16 - 13 = 3$ 策;由定理 3,第 2、3、4 诸变中因 $K = 0$,故可能出现的扐策总数 L 均为 $2M = 32$ 策,或 $M = 16$ 策。揲算过程的枝形关系如下:

		80	48	16	$16 \div 16 = 1$
131	112		64	32	$32 \div 16 = 2$
	128	96	80	48	$48 \div 16 = 3$
				64	$64 \div 16 = 4$
		112	96	80	$80 \div 16 = 5$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	1 变	2 变	3 变	4 变,($C = 3$)	$\{1,2,3,4\}$,($R = 1$)

4.4 对不挂一的揲扐算法的补充及揲扐计算的一般形式

4.4.1 对不挂一揲算的补充内容

在第 4.2 节中建立的定理 1 和定理 2 分别是下述定理 7 和定理 9 的局部形式。当时只给出定理 1 和定理 2,而没有对不挂 1 的揲扐算法作较为完整的讨论,其原因主要是本书的目的在于归纳得出用定

理5表出的《易》占揲算的一般命题，这样处理可以使问题的讨论有所集中。显然，在不挂1的条件下，存在类似于定理3～6的一套命题。为了使数学上显得比较完整，兹补充如下：

定理7：参揲总策数$S = aM + K$时，分2揲M（不挂1）后的扐策总数$L = 2M + K$或$M + K$。其中$2 - M \leqslant K \leqslant 0, a \geqslant 3, M \geqslant 2$。

定理8：参揲总策数$S = aM + 1$时，分2揲M（不挂1）后的扐策总数$L = M + 1$。其中$a \geqslant 2$，$M \geqslant 1$。

定理9：参揲总策数$S = (R + 2C)M + K$时，可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分2揲M（不挂1）的计算，经过C次变易后的结果数组为$\{R, R+1, \cdots\cdots, R+C\}$。其中$(2 - M) \leqslant K \leqslant 0$，$M \geqslant 2$。

定理10：参揲总策数$S = (R + 2C)M + 1$时，可以按《周易》占筮的揲扐计算模式进行分2揲M（不挂1）的计算，经过C次变易后的结果数组为$\{R+1, R+2, \cdots\cdots, R+C\}$。其中，$M \geqslant 2$。

上述定理的证明与定理2和定理3的证明方法类似，故不再赘述。

4.4.2　揲扐计算的一般形式

如果将R和T的取值范围由正整数扩大到整数，即包含零和负整数，（根据揲算定义，M和C的取值仍为正整数）即可超出《周易》手动操作型揲算的限制，将前文所建立的全部定理用于一般揲算。当然，这是用笔写的方式在纸上完成的揲算。由于不使用筹策算具，这时的“揲”和“扐”都表现为做减法，已无操作筹策的形态。

实例4：取$M = 3$、$C = 2$、$R = -1$、$K = 1$时，

$T = (R + 2C)M = (-1 + 2 \times 2) \times 3 = 9$，

故 $S = T + K = 9 + 1 = 10$。

根据定理 5,可以对此 S 值进行揲算。

根据定理 3,第 1 次变易中的扐策数不 4 则 7,而第 2 次变易中的扐策数不 3 则 6。揲算过程的枝形关系如下:

$$
10\begin{cases}10-7=3\begin{cases}3-6=-3\\3-3=0\end{cases}\\[2ex]10-4=6\begin{cases}6-6=0\\6-3=3\end{cases}\end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}-3\div 3=-1\\0\div 3=0\\3\div 3=1\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}\vdots & \vdots & \vdots\\ 1\text{变} & 2\text{变},(C=2) & \{-1,0,1\},(R=-1)\end{array}
$$

实例 5:取 $C = 2$、$R = -4$、$K = 0$ 时,对任意的 $M \geqslant 3$,有:

$T = (R + 2C)M = (-4 + 2 \times 2)M = 0$,

故 $S = T + K = 0$。

根据定理 5,可以对此 S 值进行揲算。

根据定理 3,各次变易中均有 $L = 2M$ 或 M 两种可能出现的情形。揲算过程的枝形关系如下:

$$
0\begin{cases}-2M\{\begin{array}{l}-4M\\-3M\end{array}\\-M\ \{\begin{array}{l}-3M\\-2M\end{array}\end{cases}
\qquad
\begin{array}{l}-4M\div M=-4\\-3M\div M=-3\\-2M\div M=-2\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}\vdots & \vdots & \vdots\\ 1\text{变} & 2\text{变},(C=2) & \{-4,-3,-2\},(R=-4)\end{array}
$$

实列 6:取 $M = 6$、$C = 2$、$R = -5$、$K = 1$ 时,

$T = (R + 2C)M = (-5 + 2 \times 2) \times 6 = -6$;

则 $S = T + K = (R + 2C)M + K = -6 + 1 = -5$。

(1) 根据定理 10,对此 S 值可做不挂 1 的揲算如下:

由定理 8,第 1 次变易时有 $L = M + 1 = 6 + 1 = 7$;

由定理 7,第 2 次变易时因对应的 K 值已为 0,故 $L = 2M$ 或

M,即 $L = 12$ 或 6。

揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{lll}
-5-7=-12\begin{cases}-12-12=-24\\ -12-6=-18\end{cases} & & \begin{array}{l}-24\div 6=-4\\ -18\div 6=-3\end{array}\\
\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & & \qquad\vdots\\
\qquad 1\text{ 变}\qquad\quad 2\text{ 变},(C=2) & & \{-4,\ -3\},(R=-5)
\end{array}
$$

(2) 根据定理 5,对此 S 值可做有挂 1 的揲算如下:

由定理 3,第 1 次变易时有 $L = 2M + K$ 或 $M + K$ 两种可能,即 $L = 2\times 6 + 1 = 13$,或者 $L = M + K = 6 + 1 = 7$。第二次变易时因对应的 $K = 0$,故 $L = 2M$ 或 M,即 $L = 12$ 或 6。揲算过程的枝形关系为:

$$
\begin{array}{llll}
-5\begin{cases}-5-13=-18\\ \\ -5-7=-12\end{cases} & \begin{array}{l}\begin{cases}-30\\ -24\end{cases}\\ \begin{cases}\\ -18\end{cases}\end{array} & & \begin{array}{l}-30\div 6=-5\\ -24\div 6=-4\\ -18\div 6=-3\end{array}\\
\qquad\vdots & \quad\vdots & & \qquad\vdots\\
\qquad 1\text{ 变} & 2\text{ 变},(C=2) & & \{-5,\ -4,\ -3\},\ (R=-5)
\end{array}
$$

4.5　关于筮数算得方法的猜测

本书第 2 章 2.2.2 节介绍了出现于商周时期的筮数。从表 2－2 统计的情况来看,在 6 个筮数一组的占法中,所用数字以 1、5、6、7、8 为多,在讨论筮数的算得方法时当以它们为主。9 的出现只有 4 例,在总计 457 个筮数中所占比例不到 1%,就算得方法的猜测而言,似可暂不考虑。对于这些筮数中没有 2、3、4 三数的原因,一种解释是当时的算法可能有这几种结果数,只是在记录时因写法容易混淆而按奇偶做了归并,即奇数 3 写为 1,偶数 2、4 写为 6,[2] 因而,若略去数字 9,实际算得的结果数中应包含了从 1 到 8 共 8 个整数(参看本书第 2 章 2.2.2 节)。另一

种解释是记录这些筮数时采用的算法本身就不会得出 2、3、4 这几种结果数[3]（参看本书第 8 章 8.1.1 节）。此外，没有发现使用了 10 或大于 10 的其他整数作筮数的情形。当学者们相信这些数字串是当时的筮算记录，并称之为筮数之后，接下来的问题就是这些筮数是用什么方法算出来的？显然，在现有条件下，要想解答这个问题尚有一定的难度，不过，仍可以明确一些较为基本的依据。笔者认为，主要的思考依据有以下三点：

1. 这些筮数的出现地域以商周王朝的势力范围为主，但时间跨度从殷商到西周却为时不短，尤其是商人的算法是否就直接传续于周人，仍有待考证。因而，很难认为已发现的这些筮数都是采用某种统一的算法求得，虽然也不排除在这些算法中有可能存在着使用时间较长，流传范围较广的某种主流算法，但将殷商与西周的算法分开来讨论，似乎较为合适。

2. 所有筮数都必有各自获取的方法，我们目前见到的只是作为计算结果的筮数，而要想知道的则是算出这些筮数的算法，所以我们的研究思路表现为从结果反溯算法。这样，可选算法必然会有各种各样的类型，具体算法就有可能更是多得数不胜数。显然，在目前的背景条件下，不论得出的算法规则是什么形态，都属于猜测。我们通过对不同算法方案的比较，则可将猜测的范围做适当的收缩。

3. 除了《易传·系辞上》记载的揲算，迄今为止尚未发现秦以前的其他筮算方法。因而，对于与筮数相关的筮算方法的猜测似应局限于揲算的模式，暂时还找不到较为充分的理由以引入其他算法模式。当然，这一估计与确有可能存在着与揲算模式不同的其他算法模式的情形并不冲突。这就是说，在不同的算法模式被发现之前，反溯已知筮数的算得方法时，暂时还只宜于在揲算模式内考虑。这样，可供参考的各种算法的不同，主要

表现在所用策数和一些局部揲算环节的设计配置方面。

以此为基础,结合本章建立的定理5和定理9,似可对6个筮数一组的商周筮数试做相关的研究。不过,考虑到商代使用的算法还难于达到传世揲算模式这样高的算法设计水平,而且可供参考的资料又太少,使得目前还不具备讨论殷商筮算方法的条件,因而暂不讨论殷商筮数的算得方法,只对西周筮数的算得方法提出下述猜测:

1. 如果以结果数组{1,2,3,……,8}作为出发点,按揲算模式,应考虑$R=1$、$C=7$条件下的相关算法。若取$M=3\sim5$,由

$$T=(R+2C)M=(1+2\times7)M=15M,$$

可知T的取值有45、60和75策三种。由

$$S=T+K\begin{cases}无挂1时,(2-M)\leqslant K\leqslant 0,\\有挂1时,(3-M)\leqslant K\leqslant 1,\end{cases}$$

便可确定参揲总数S的值。虽然从S的取值最少为44策(即$M=3$、无挂1、取$K=-1$时,$S=45-1=44$),最多不超过76策(即$M=5$、有挂1、取$K=1$时,$S=75+1=76$)来看,使用这些参揲总策数完成揲算应该没有问题,但是这类算法要经过7次变易才能求出1个结果数,对6个结果数一组的占筮法而言,整个揲算过程要历经$7\times6=42$次变易才能完成,似乎过于繁琐。笔者估计,古代占筮家们即使找到过这类算法,也不会给予重视,因为按照同样的思路,他们完全有可能创制出比这类算法更加适合于占筮的若干种其他不同的算法。

2. 如果以结果数组{5,6,7,8}作为反溯算法的出发点,则可以考虑揲算模式下$R=5$、$C=3$、$M=3\sim5$,以及满足K值取值条件时,由定理5或定理9给出的这类特殊命题下的算法。由于在与5、6、7、8诸数同出的筮数中还有为数不少的1,在关于筮数的研究中,要找到一种算法,使数1的求得与5、6、7、8诸数的

求得相协调，是相当困难的。笔者的想法是，筮数中数字1的出现，不妨用记录方式的特殊设置来解释。即当时在揲得结果数为5或7时，可能采用过一些不同的记录方式，一种是直接记为5或7，另一种是将它们改记为1。当然，也可能存在第三种记录方式，即依循某种我们目前尚不知道的具体规则，有部分筮数要由5或7改记为1，而另一部分仍记为5或7。在这些情况下，数1都不是筮算的结果，不必纳入算法的设计。改记做法似可认为是筮数向卦象符号过渡的早期形态，或者说数1在不少筮数记录的场合中具有符号的性质。本书第5章对传世揲算结果数的出现概率做了计算，发现将6、7、8、9这四种结果数分为奇偶后，出现概率是相等的。这种情形对于结果数为5、6、7、8四种时也是一样的，即算得奇数（5和7）与算得偶数（6和8）的机会也是均等的。从表2-2统计的结果来看，将筮数作奇偶分类后，奇数和偶数所占的比例相当均衡，这一现象应是对上述猜测的一种支持。

在不少情况下，定理5和定理9有相互重叠的地方。即，对同一参揲策数，有时会出现既可挂1，也可不挂1的做法。对此，笔者倾向于认为在揲算的形成及定型过程中，很可能存在过从无挂1到有挂1的演进。此外，还可能存在过变易次数C从1次增加到3次，揲策数M从每次揲取3策增加到5策，最后定型于4策的演化过程。

如果按照传世揲算的模式，以所得结果数组为$\{5,6,7,8\}$作为依据，由此反溯揲算方法时，当有多种特殊算法可供选用。例如：

(1) 取$C=3$、$R=5$、$M=3$时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times3)\times3+K=33+K$。

由定理9，$(2-M)\leqslant K\leqslant 0$，$K=-1$或0，

可知$S=32$或33策时，可做不挂1的揲算。

由定理5，$(3-M)\leqslant K\leqslant 1$，$K=0$或1，

可知$S=33$或34策时，可做有挂1的揲算。

上述4种算法的结果数组都是{5，6，7，8}。

(2) 取$C=3$、$R=5$、$M=4$时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times 3)\times 4+K=44+K$。

由定理9，$(2-M)\leqslant K\leqslant 0$，$K=-2$、$-1$或0，

可知$S=42$、43或44策时，可做不挂1的揲算。

由定理5，$(3-M)\leqslant K\leqslant 1$，$K=-1$、0或1，

可知$S=43$、44或45策时，可做有挂1的揲算。

上述6种算法的结果数组都是{5，6，7，8}。

(3) 取$C=3$、$R=5$、$M=5$时，

$S=(R+2C)M+K=(5+2\times 3)\times 5+K=55+K$。

由定理9，$(2-M)\leqslant K\leqslant 0$，$K=-3$、$-2$、$-1$或0，

可知$S=52$、53、54或55策时，可做不挂1的揲算。

由定理5，$(3-M)\leqslant K\leqslant 1$，$K=-2$、$-1$、0或1，

可知$S=53$、54、55或56策时，可做有挂1的揲算。

上述8种算法的结果数组都是{5，6，7，8}。

可以认为，即使是在揲算模式下，得出筮数为5、6、7、8的具体算法当不止上述共计18种算法的范围。比如，根据定理6和定理10也可以构造出一系列可供选用的算法方案。这就是说，即使在局限于揲算模式的条件下，西周占筮家们仍有相当大的选择空间来完成筮算方法的设计和优化改进。当揲算结果数组变为{6，7，8，9}时，同样存在数十种具体的算法设计可供选用，传世揲算的最后定型，很有可能是在这样的背景下逐步优选完成的。

进入西周后，相对于晚商，筮数1的比重有明显增加，尽管我们对殷商时期使用的占筮算法还缺乏了解，不过从形态上观

察，如果设想商代的筮法也有将数1作奇数符号使用的做法的话，这种现象很可能是筮数符号化程度逐渐增强的表现。发展到西周晚期的时候，筮算结果的基本的记录规则已演化为筮得奇数时均记为一或阳爻，而筮得偶数时则记为六或阴爻，从而导致了卦象的出现。在这个过程中，算法设计也发生了改进，形态上的变化是结果数组由以{5,6,7,8}为主变成了{6,7,8,9}，所用算法也定型为传世的《易》占算法。至于西周占筮家们最后选用了结果数组为{6,7,8,9}的算法的主要原因，本书第7章的7·2·2节通过对比研究做了一些相应的推测，也许可供参考。但是，如果要问古代占筮家们在众多可选算法中具体采用过哪些算法？经由了怎样的具体途径才完成了算法的优选定型工作？恐怕永远也找不到确切的答案了。

注释：

[1]沈宜甲：《科学无玄的周易》，中国友谊出版公司1984年8月版，第26页。

[2]张政烺：《易辨》，载《中国哲学第十四辑》，人民出版社1988年1月版，第4页。

[3]吴文俊：《中国数学史大系·第一卷》，北京师范大学出版社1998年9月版，第168～192页。

第 5 章 《周易》揲算结果数的出现概率

《易》占揲算得到的结果数有 6、7、8、9 四种可能。本章讨论这些结果数的出现概率,并在此基础上讨论阴阳两种爻符的出现概率、六十四卦中各卦的出现概率,以及六十四卦的各类之卦的出现概率。

5.1 《左传》、《国语》的《易》占记录和问题的提出

左丘明是春秋晚期的鲁国史官,掌史之外,他肯定还是一位熟知卜筮的专家。也许是出于对卜筮的关注,他在其名作《左传》和相传也是他写的《国语》两书中,记录了二十余处涉及《易》占的历史事件。这些记录为后人研究古代占筮提供了重要的材料,本章讨论的问题便与其中用《周易》行占的筮例有关。

按照《周礼・春官宗伯・大卜》的说法,周代统称为《易》的占筮方法有三种:"一曰《连山》,二曰《归藏》,三曰《周易》。其经卦皆八。其别皆六十有四。"大约在汉晋时期,《连》、《归》二《易》先后失佚,只有《周易》传续至今。历代学者多认为《左》、《国》所记《易》占,应当包含这三种占法。例如尚秉和先生曾说:"《左传》、《国语》所谓'《艮》之八','《泰》之八',以及所引繇辞为《周易》所无者,先儒皆谓二《易》之辞也。"[1]一般认为,三《易》的卦象相同,用于成卦的筮算方法也相同,差别在于

“《连山》、《归藏》用七八，以不变为占，而《周易》用九六，以变为占。”[2]这里的“变”和“不变”，与所谓的“变卦”做法有关。在《左》、《国》筮例中，凡用《周易》作占，几乎都有变卦的情形出现，其句式常写作“遇……之……”。例如《左传·庄公二十二年》的“遇《观》䷓之《否》䷋”，以及《左传·闵公元年》的“遇《屯》䷂之《比》䷇”，等等。在这里，所“遇”的是揲算得到的卦象，称为“本卦”，所“之”的便是变得的另一个卦象，称为“之卦”。关于《周易》的变卦规则，《易学启蒙·考变占第四》云：“用九、用六者，变卦之凡例也。”也就是通常所说的“九六变，七八不变”。按此规则，在求取本卦时，若揲扐计算结果数为6或9，所对应的爻符才能由“－－”或“——”变换为“——”或“－－”。而所得结果数为7或8时，所对应的爻符“——”或“－－”则不能变换。显然，用《周易》变卦占法作占时，只要知道了本之两卦的卦象即可反推出本卦成卦时所依据的揲算结果数。应当说，这是一个很有用的结论。

由于本文是依据传世《周易》以变为占的规则，反推古代占筮时得到的揲算结果数，所以在引用《左》、《国》筮例时，只能挑选其中可判断确为使用《周易》的实占事件。满足条件的筮例共有13件，它们明确给出了在实际占筮时，通过揲扐计算得到的“本卦”和变卦后所得“之卦”的卦象。故可根据这13件筮例的本卦和之卦，反推出本卦成卦时揲扐计算所得的结果数。具体情况参看表5－1。

表5-1 《左传》、《国语》中的《周易》实占卦象和推得的筮数

易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦	易占事件	本卦	之卦
1 庄二十二年《观》之《否》一爻变	——7 ——7 – –6 – –8 – –8 – –8	—— —— ——* – – – – – –	2 闵元年《屯》之《比》一爻变	– –8 ——7 – –8 – –8 – –8 ——9	– – —— – – – – – – – –*	3 闵二年《大有》之《乾》一爻变	——7 – –6 ——7 ——7 ——7 ——7	—— ——* —— —— —— ——	4 僖十五年《归妹》之《睽》一爻变	– –6 – –8 ——7 – –8 ——7 ——7	——* – – —— – – —— ——
5 僖二十五年《大有》之《睽》一爻变	——7 – –8 ——7 ——9 ——7 ——7	—— – – —— – –* —— ——	6 周语下《乾》之《否》三爻变	——7 ——7 ——7 ——9 ——9 ——9	—— —— —— – –* – –* – –*	7 襄九年《艮》之《随》五爻变	——9 – –6 – –6 ——9 – –8 – –6	– –* ——* ——* – –* – – ——*	8 襄二十五年《困》之《大过》一爻变	– –8 ——7 ——7 – –6 ——7 – –8	– – —— —— —— —— – –*
9 昭五年《明夷》之《谦》一爻变	– –8 – –8 – –8 ——7 – –8 ——9	– – – – – – —— – – – –*	10 昭七年《屯》静爻	– –8 ——7 – –8 – –8 – –8 ——7	不变	11 昭七年《屯》之《比》一爻变	– –8 ——7 – –8 – –8 – –8 ——9	– – —— – – – – – – – –*	12 昭十二年《坤》之《比》一爻变	– –8 – –6 – –8 – –8 – –8 – –8	– – ——* – – – – – – – –
13 哀九年《泰》之《需》一爻变	– –8 – –6 – –8 ——7 ——7 ——7	– – ——* – – —— —— ——	注：本卦爻符旁的数字为反推得到的揲算结果数，发生变化的爻符在之卦旁用*号标出。								

关于《左》、《国》中的未选《易》例，说明如下：

1. 以下13件筮例均为因事取义，不是实际占筮，故不取：僖十五《震》之《离》、《离》之《震》；宣六《丰》之《离》；宣十二《师》之《临》；襄二十八《复》之《颐》；昭元《蛊》；昭二十九《乾》之《姤》、之《同人》、之《大有》、之《夬》、之《坤》，以及《坤》之《剥》；昭三十二《大壮》。

2. 以下6例不能肯定是用《周易》，故不取：僖十五《蛊》；成

十六《复》;襄九《艮》之八;晋语四《泰》之八;晋语四贞《屯》、悔《豫》,皆八。

3. 以下 2 例虽为实占,又用《周易》作释,但之卦情况不明,不能据以推出揲算结果数,故不取:出自晋语四贞《屯》、悔《豫》,皆八。后改为《屯》、《豫》。

4. 以下 1 例有异议,故不取:襄九《艮》之《随》。此例本卦出于襄九《艮》之八,后来史官又改用《周易》作《艮》之《随》。若是依实占改得,则为可取之例,但若是史官因事取义而编造的"之《随》",则不可取。两种解释,尚不能确证谁对。

所选 13 个筮例的本卦共有 $6\times13=78$ 爻,它们分别由 78 个独立完成的揲扐计算结果数所确定。在这些本卦中:

结果数 6 共出现 9 次, 出现频率为 $9/78=0.1154$;

结果数 7 共出现 28 次,出现频率为 $28/78=0.3590$;

结果数 8 共出现 32 次,出现频率为 $32/78=0.4102$;

结果数 9 共出现 9 次, 出现频率为 $9/78=0.1154$。

显然,结果数 6 和 9 的出现频率很低,而 7 和 8 的出现频率则相当高。按照直观的感觉,6、7、8、9 这四个结果数的出现频率似乎不应该有这样大的差距,而实算差异为什么会如此之大呢?其原因要么是《左传》和《国语》所录的例子仍然嫌少,虽然已有 78 个实算结果,相对四种结果数应能反映出一定的统计规律,但也可能碰巧选到的恰是一边倒的筮例,因而不具有代表性;要么就是直观的感觉靠不住。

北宋学者欧阳修(1007~1072)在其占筮活动中也发现了这种情形,在他所写的《明用》一文中,有"及其筮也,七八常多,而六九常少"的说法。(见《四库全书·子部》)可见揲算结果数出现频率的不均衡很可能并非偶然现象。

由于问题的实质与揲算结果数的出现概率有关,因而可以

通过现代数学中的概率分析，对“七八常多，而六九常少”的现象做出相应的解释。此外，若将概率计算的结果应用于相关的考古研究，也许能得到一些有参考价值的结论。

5.2 揲扐计算结果数出现概率的分析

5.2.1 从揲算规则看结果数的获得渠道

根据《易传 · 系辞》“大衍之数”章的揲算成卦规则，求出某一个结果数的一轮揲扐计算（包含了 3 次变易）是完全独立的，所以只需对一轮揲算进行研究就可以了。而一轮揲算的过程可以简明地用各次变易后参揲策数变化情形的枝形关系表示如下：

$$
49\left\{\begin{array}{l} 49-9=40\left\{\begin{array}{l}40-8=32\\40-4=36\end{array}\right.\\[2ex] 49-5=44\left\{\begin{array}{l}44-8=36\\44-4=40\end{array}\right.\end{array}\right.
\qquad
\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}32-8=24\\32-4=28\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}36-8=28\\36-4=32\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}40-8=32\\40-4=36\end{array}\right.\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}24\div4=6\\28\div4=7\end{array}\right\}\ \text{— —}\\ \left.\begin{array}{l}32\div4=8\\36\div4=9\end{array}\right\}\ \text{——}\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{array}
$$

第 1 次变易　第 2 次变易　第 3 次变易，可能出现的结果数　对应的爻符

显然，6、7、8、9 这四个可能出现的结果数的获得渠道的多少是有差异的。具体列出来便是：

$$
49-9-8-8=24, \qquad 24\div4=6;
$$

$$
\left.\begin{array}{l}49-9-8-4\\49-9-4-8\\49-5-8-8\end{array}\right\}=28, \qquad 28\div4=7;
$$

$$\left.\begin{array}{l}49-9-4-4\\49-5-8-4\\49-5-4-8\end{array}\right\}=32\ ,\qquad 32\div4=8;$$

$$49-5-4-4\ =36\ ,\qquad 36\div4=9。$$

可知结果数的获得渠道一共有八个,但其中 6、9 两数都只有一个获得渠道,而 7、8 两数则各有三个获得渠道。单从这一步就表明,7、8 两数的出现概率应明显地高于 6、9 两数的出现概率。但是事情还不止此,结果数的出现概率还应与各次变易完成后揲得的策数(即上列 40、44;32、36、40;24、28、32、36 诸数)有直接的关系。显然,相关分析则与各次变易中可能发生的扐策数(即上面列出的 8 个渠道中作为减数的 4、5、8、9 四个数)的出现概率有关。所以,还要做进一步的讨论,才能求出结果数的出现概率。

5.2.2 各次变易中可能发生的扐策数的出现概率

按《易传 · 系辞》"大衍之数"章记载的成卦算法,用来确定爻符的揲扐计算过程是:将 49 根蓍草或竹签(称为策)随机地分成两堆("分二"),然后从任意一堆中取出 1 策放在一边("挂一"。这种取法等价于约定每次都只能从某一堆中取出 1 策)。但取后该堆策数不能为零。再对两堆策分别"揲四",即每次 4 根地将策数出,直到各堆所余策数小于或者等于 4 策,但不能为零。之后将两堆揲后的余策和挂出的 1 策一并通过"归扐"而退出揲算。我们将这样退出揲算的策数称为扐策数。下述概率分析的前提条件是每一次变易的分二、挂一 操作必须是随机的,不能掺入人为控制的因素。在《周易》筮法中,这个条件应能满足。

在第 1 次变易中,扐策数的值不 5 则 9。虽然归扐的策数只有 5 策或 9 策两种,但它们出现的概率如何则应做详细分析。

由于可能出现的情形是有限的，而且数量不大，表5－2采用全举的办法列出了所有可能的情况，可知归扐5策的概率是 $P_1 = 72/94$。（如果不是随机地从两堆策中挂1，而是指定只能从Ⅰ、Ⅱ两堆中的某一堆挂1，则归扐5策的概率是 $P_1 = 36/47$，显然，从概率计算的角度看，两种挂1方法是等价的。下同）而归扐9策的概率为 $P_2 = 22/94$。

在第2次变易中，用于揲算的策数是 $49-5=44$ 策，或 $49-9=40$ 策。虽然有两种总策数，但它们都必然是4的整数倍。因此，分2、挂1、揲4之后，归扐的策数都是不4则8。但是，不同参揲策数在第2变中的扐策数4和8的出现概率并不相同。

对于44策，可将归扐4策的概率记为 P_3，且 $P_3 = 44/84$；归扐8策的概率记为 P_4，且 $P_4 = 40/84$。

对于40策，可将归扐4策的概率记为 P_5，且 $P_5 = 40/76$；归扐8策的概率记为 P_6，且 $P_6 = 36/76$。

用全举法完成的统计过程参看表5－2。

第3次变易时，参揲的策数再次发生了变化，共有32、36和40策三种。由于它们都必然是4的整数倍，因此扐策数的出现情况与第二次变易时相同，都只有4策或8策两种可能，但是不同参揲策数的扐策数在第3变中出现的概率仍不相同。

对于36策，可将归扐4策的概率记为 P_7，且 $P_7 = 36/68$；归扐8策的概率记为 P_8，且 $P_8 = 32/68$；

对于32策，可将归扐4策的概率记为 P_9，且 $P_9 = 32/60$；归扐8策的概率记为 P_{10}，且 $P_{10} = 28/60$。

用全举法完成的统计过程参看表5－2。

5.2.3 结果数的出现概率的计算

现在继续对结果数6、7、8、9的出现概率做完整的分析和计算。

表 5－2　《周易》揲算过程中可能出现的扐策数统计及出现概率

（按参揲策数以 4 为周期排出）

参揲策数			49				44				40				36				32			
第一周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
		Ⅱ堆策数	48	47	46	45	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
	扐策数	从Ⅰ堆挂1		5	5	5		4	4	8		4	4	8		4	4	8		4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第二周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	8
		Ⅱ堆策数	44	43	42	41	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第三周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	12
		Ⅱ堆策数	40	39	38	37	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8
第四周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	16
		Ⅱ堆策数	36	35	34	33	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9	5	5	5	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8A
		从Ⅱ堆挂1	5	5	5	9	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8	4	4	8	8

续表

参揲策数			49	44	40	36	32
第五周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	17 18 19 20	17 18 19 20	17 18 19 20	17 18	
		Ⅱ堆策数	32 31 30 29	27 26 25 24	23 22 21 20	19 18	
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9 5 5 5	8 4 4 8	8 4 4 8	8 4	
		从Ⅱ堆挂1	5 5 5 9	4 4 8 8	4 4 8 8	4 4	
第六周期	分堆策数	Ⅰ堆策数	21 22 23 24	21 22			
		Ⅱ堆策数	28 27 26 25	23 22			
	扐策数	从Ⅰ堆挂1	9 5 5 5	8 4			
		从Ⅱ堆挂1	5 5 5 9	4 4			
可能出现的扐策数的种数[注1]			出5有72种，出9有22种	出4有44种，出8有40种	出4有40种，出8有36种	出4有36种，出8有32种	出4有32种，出8有28种
扐策数的出现概率[注2]			$P_1=72/94$；$P_2=22/94$	$P_3=44/84$；$P_4=40/84$	$P_5=40/76$；$P_6=36/76$	$P_7=36/68$；$P_8=32/68$	$P_9=32/60$；$P_{10}=28/60$

注：1. 由于具有对称性，表中只列了一半的周期数值，种数统计时已考虑了另一半的情形。

2. 如果约定只能从Ⅰ、Ⅱ两堆中的某一堆挂1，本表可相应简化，所得扐策数的出现概率均为表中P值的分子分母同时除以2。

1. 结果数为6时,对应于3变结束后的揲策总数24。获得6的渠道只有一个,这个结果数的出现概率取决于相应的扐策数的出现概率,根据概率理论中的乘法原则,可按下式计算:

$P(6) = P_2 \times P_6 \times P_{10} = 22/94 \times 36/76 \times 28/60 = 0.0517$。

2. 结果数为7时,对应于3变结束后的揲策总数28。获得7的渠道共有三个,根据概率理论中的乘法原则,它们的概率为:

$P(7)_1 = P_2 \times P_6 \times P_9 = 22/94 \times 36/76 \times 32/60 = 0.0591$;

$P(7)_2 = P_2 \times P_5 \times P_8 = 22/94 \times 40/76 \times 32/68 = 0.0580$;

$P(7)_3 = P_1 \times P_4 \times P8 = 72/94 \times 40/84 \times 32/68 = 0.1717$。

根据概率理论中的加法原则,获得7的概率为:

$P(7) = 0.0591 + 0.0580 + 0.1717 = 0.2888$。

3. 结果数为8时,对应于3变结束后的揲策总数32。获得8的渠道共有三个,根据概率理论中的乘法原则,它们的概率为:

$P(8)_1 = P_2 \times P_5 \times P_7 = 22/94 \times 40/76 \times 36/68 = 0.0652$;

$P(8)_2 = P_1 \times P_4 \times P_7 = 72/94 \times 40/84 \times 36/68 = 0.1931$;

$P(8)_3 = P_1 \times P_3 \times P_6 = 72/94 \times 44/84 \times 36/76 = 0.1900$。

根据概率理论中的加法原则,获得8的概率为:

$P(8) = 0.0652 + 0.1931 + 0.1900 = 0.4483$。

4. 结果数为9时,对应于3变结束后的揲策总数36。获得9的渠道只有一个,根据概率理论中的乘法原则,其概率为:

$P(9) = P_1 \times P_3 \times P_5 = 72/94 \times 44/84 \times 40/76 = 0.2112$。

显然,四种结果数的出现概率是极不均衡的。得6的机会最少,其出现概率仅为0.0517。得9次之,出现概率为0.2112。得7排第三,出现概率为0.2888。而得8的机会最多,出现概率高达0.4483,几乎有一半的揲算都会得到8这个结果数。

与《左传》和《国语》中的筮例相对比,立即发现实算结果数的出现频率与理论计算所得的概率基本相符(参看表5-3)。

从而可以用概率计算的结果解释6、9常少而7、8常多的揲扐计算现象。尽管《左》、《国》筮例中6和9的实算偏差显得比较大,但可相信当取用实例的数量增大时,这种偏差会变得小些。

表5-3 《左》、《国》筮例中揲算结果数的统计频率与概率比较

结果数	统计频率(实占)		概率(理论)	
6	9次	0.1154	P(6)	0.0517
7	28次	0.3590	P(7)	0.2888
8	32次	0.4102	P(8)	0.4483
9	9次	0.1154	P(9)	0.2112
合计	78次	1		1

5.3 爻符、卦象和各类之卦的出现概率

5.3.1 阳爻和阴爻的出现概率

就本卦的成卦来说,揲算完成后,得奇数结果7或9时所定出的爻符都是阳爻"——",得偶数结果6或8时,定出的爻符都是阴爻"－－"。根据概率理论中的加法原则,得阳爻的概率是结果数为7和9时的概率的和。

即 $P(阳) = P(7) + P(9) = 0.2888 + 0.2112 = 0.5$;

同理,得阴爻的概率是算得结果数为6和8时的概率的和。

即 $P(阴) = P(6) + P(8) = 0.0517 + 0.4483 = 0.5$。

上述结果表明,成卦时阳爻或阴爻出现的概率都是相同的,没有哪一个会显得较特殊。而在表5-1所列《左》、《国》筮例的78个本卦爻符中,阳爻有37个,阴爻有41个,出现频率分别为37/78 =0.4744和41/78 =0.5256,的确接近于P(阳) = P(阴) =0.5的概率数值。

5.3.2 64 种卦象的出现概率

阳爻和阴爻的出现概率都等于 0.5 的情况对于六十四卦的构成来说正好也是匹配的，因为在 $6 \times 64 = 384$ 个爻符中，阳爻和阴爻的数目也是各占一半。这样，对于 384 个位置上的爻符来说，任何一个的出现概率都是 1/384。可见《周易》本卦揲算成卦时，64 种卦象的出现概率必然相等，都等于 $1/384 \times 6 = 1/64$。也就是说，每一种卦象的获得机会都是相同的，从数学的角度来看，揲扐算法的确是一种很合理的没有任何偏见的成卦设计。

关于任何一种本卦卦象的出现概率都是 1/64 的结论，还可以用其他方法予以证明。例如：将由揲算给定的某种卦象记为《G》，如果在《G》的 6 个爻符中，有 n 个是阳爻，则其余 $6-n$ 个爻符必定是阴爻。其中，$0 \leqslant n \leqslant 6$。由于阳爻由揲算结果数 7 或 9 决定，阴爻由揲算结果数 6 或 8 决定，而在 64 种卦象共计 384 个爻符中，阳爻和阴爻各有一半，都是 192 个，可得《G》的出现概率 P(《G》)为：

$$
\begin{aligned}
P(《G》) &= [P(6) + P(8)](6-n)/192 + [P(7) + P(9)]n/192 \\
&= [0.5(6-n) + 0.5n]/192 = 3/192 = 1/64。
\end{aligned}
$$

在表 5－1 所列《左》、《国》筮例的 13 个本卦中，除《屯》卦出现了 3 次，《大有》卦出现了 2 次，其余卦象都只出现 1 次，成卦分布大体上是均匀的。因此，这些筮例也大致印证了 64 种卦象具有均等出现概率的结论。西周时代的占筮家们所达到的这种设计水平（包括卦象的设计和成卦算法的设计），的确令人惊叹。虽然目前还没有证据证明《周易》占筮的发明者们已经掌握了类似于概率分析方面的知识，但这种设计具有概率分布上

的合理性并显示出一种均衡意识则是不争的事实。

5.3.3 各类之卦的出现概率

按照变卦规则，揲算得到的本卦将变成哪一种之卦，全由揲算结果数决定。由于每个卦象都由六个爻符构成，如果成卦时六轮揲算的结果数都是7或8，所得本卦无爻可变，此时本之两卦便是相同的，称为静爻。如果在揲得本卦时，六个爻符中只有一个是由揲算结果数6或9确定的，这个爻符就要发生变化，此时本之两卦相比，必有一个爻符不同，称为一爻变。同样地，还存在二爻变、三爻变、四爻变、五爻变和六爻变，一共有7种之卦类型。应当指出，在表5-1中所举的13个筮例中，静爻（昭七），三爻变（周语下）和五爻变（襄九）各有1例，其余10例全部都是一爻变，显示出各类之卦的出现频率有一边倒的不均衡现象。对此，有加以说明的必要，从而涉及六十四卦的各类之卦出现概率的计算。

不难证实，对于任何一个本卦，它的之卦都有64个。其中静爻和六爻变各1个、一爻变和五爻变各6个、二爻变和四爻变各15个、三爻变有20个。于是，对于64个本卦，一共就有$64 \times 64 = 4096$个可能出现的之卦，它们同样也可分为7种类型。这7种之卦类型的出现概率$P(B_i)$可用下面的算式进行计算：

$$P(B_i) = [\sum_{j=6}^{9} P(j) a_{ij}] \div 6144 \qquad \cdots\cdots(1)$$

其中，$i = 0,1,\ldots\ldots,6$；$j = 6,7,8,9$。参数a_{ij}的值参看表5-4。

a_{ij}是与7种之卦类型和四种揲算结果数对应的之卦爻符个数，双下标中的i表示之卦类型，j表示揲算结果数。显然，表5-4中a_{ij}数值的总和必须等于所有可能出现的之卦的总爻数$6 \times$

4096 = 24576。之卦中与 j = 6 或 9 对应的爻符是发生了变化的爻符，不妨称为变爻，即变得之爻。在表 5 - 1 中，有 * 的爻符都是变爻。之卦中与 j = 7 或 8 对应的爻符没有发生变化，可称为不变爻。a_{ij} 的数值可用下述方法确定：

表 5 - 4　　计算 $P(B_i)$ 时取用的 a_{ij} 值

之卦类型	之卦种数	之卦爻数	与揲算结果数对应的爻符数 a_{ij}					七类之卦的出现概率 $P(B_i)$
			a_{ij} j / i	6	7	8	9	
静爻	64 × 1 = 64	6 × 64 = 384	0	0	192	192	0	0.0231
一爻变	64 × 6 = 384	6 × 384 = 2304	1	192	960	960	192	0.1234
二爻变	64 × 15 = 960	6 × 960 = 5760	2	960	1920	1920	960	0.2714
三爻变	64 × 20 = 1280	6 × 1280 = 7680	3	1920	1920	1920	1920	0.3125
四爻变	64 × 15 = 960	6 × 960 = 5760	4	1920	960	960	1920	0.1973
五爻变	64 × 6 = 384	6 × 384 = 2304	5	960	192	192	960	0.0641
六爻变	64 × 1 = 64	6 × 64 = 384	6	192	0	0	192	0.0082
合计	64 × 64 = 4096	6 × 4096 = 24576	7 种	6144	6144	6144	6144	1

静爻情形：此时 i = 0。由于之卦中全是不变爻，没有变爻，所以 a_{06} = a_{09} = 0。

又因静爻时，所有可能出现的之卦正好就是 64 种本卦自身，可知在 384 个之卦爻符中，阳爻和阴爻的数量必定各占一半。

故 a_{07} = a_{08} = 384 × 1/2 = 192。

一爻变情形：此时 i = 1。因为每个之卦中只有 1 个变爻，而其余 5 个都是不变爻，所以在 384 种一爻变之卦的 2304 个爻符中，变爻数量占 1/6，不变爻数量占 5/6。另一方面，对于 2304 × 1/6 = 384 个变爻，因为它们是由 64 种本卦，每卦的 6 个爻符逐

一依序变化而得(即变爻数为$6\times64=384$),可知其中必有一半是阳爻,另一半是阴爻。注意到在2304个一爻变的之卦爻符中,阳爻和阴爻必定各占一半,可知在不变爻中也是阳爻和阴爻各占一半。

故　$a_{16}=a_{19}=2304\times1/6\times1/2=192$;

　　$a_{17}=a_{18}=2304\times5/6\times1/2=960$。

二爻变情形:此时$i=2$。因为每个之卦中都有2个变爻,而其余4个都是不变爻,所以960种二爻变之卦的5760个爻符中,变爻数量占2/6,不变爻数量占4/6。另一方面,对于$5760\times2/6=1920$个变爻,因为它们都是由64个本卦,每卦逐一依序变得,可知其中必有一半是阳爻,而另一半是阴爻。注意到在5760个二爻变的之卦爻符中,阳爻和阴爻必定各占一半,可知在不变爻中也是阳爻和阴爻各占一半。

故　$a_{26}=a_{29}=5760\times2/6\times1/2=960$;

　　$a_{27}=a_{28}=5760\times4/6\times1/2=1920$。

类似地,便可求出表5-4中所有a_{ij}的数值。

下面以之卦类型为一爻变时,其出现概率$P(B_1)$的计算为例,说明$P(B_i)$的计算过程:

$$\begin{aligned}P(B_1)&=[P(6)a_{16}+P(7)a_{17}+P(8)a_{18}+P(9)a_{19}]\div6144\\&=(0.0517\times192+0.2888\times960+0.4483\times960+\\&\quad 0.2112\times192)\div6144\\&=0.1234。\end{aligned}$$

表5-4列出了由式(1)求得的7种$P(B_i)$的值,显然,各类之卦的出现概率很不均匀。理论上,三爻变的出现机会几乎要占占筮总数的三分之一,而六爻变的出现机会却不到百分之一。

与$P(B_1)=0.1234$相比较,表5-1中列出的《左》、《国》筮例中,一爻变类型的确是出现得太多。这种情形当属偶然,其出

现与所选筮例只有 13 例，相对 7 种之卦类型，选取数量过少有关。要想从实际占筮中观察到与不同类型之卦出现概率相近的统计结果，一般需要进行足够多次数的占筮。

应当指出，对于 4096 种之卦，可以计算出各种之卦出现概率的理论数值。但是因为之卦基数较多，而实占统计数量往往偏少，作为一种概率指标，通常情况下应用意义不大，故本书未予计算。特殊情形的相关计算可参看本书第 6 章 6.3 节。

5.3.4 小结

根据传世的《易》占揲算方法和变卦规则，可以归结出四个概率指标：

1. 阴阳两种爻符的出现概率都是 0.5；

2. 64 种卦象中任何一种的出现概率都是 1/64；

3. 揲算结果数 6、7、8、9 的出现概率分别为：

$P(6) = 0.0517$、$P(7) = 0.2888$、$P(8) = 0.4483$、$P(9) = 0.2112$；

4. 7 种之卦类型的出现概率分别为：

$P(B_0) = 0.0231$、$P(B_1) = 0.1234$、$P(B_2) = 0.2714$、$P(B_3) = 0.3125$、

$P(B_4) = 0.1973$、$P(B_5) = 0.0641$、$P(B_6) = 0.0082$。

在本书第 6 章中，这四个概率指标将为相关考古课题的研究提供一些参考。

注释：

[1] 尚秉和：《周易尚氏学》，光明日报出版社 2006 年 1 月版，第 9 页。

[2] 李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 45 页。

第6章 《周易》揲算概率指标的考古应用

第5章给出了揲扐算法和卦象构成中涉及的四种概率指标。本章将使用这些结果以及相关的概率计算方法,讨论一些考古学中的课题。

6.1 《周易》揲算方法和变卦规则定型时期的下限

6.1.1 相关研究的概况

《左传》和《国语》中记载了春秋时期的许多占筮事件,其中大多数是用《周易》作占时的相关记录。这些记录中所引用的繇辞和卦象与传世的《周易》文本完全相同,加上其他古代文献中相关的零星记载,历代学者一般认为《周易》经文和卦象在春秋时期已经定型,或者说,春秋时期使用的《周易》古经与今本《周易》中的经文和卦象相比较,已无性质上的差异。但是《左传》中并没有具体介绍当时所用的占筮方法。因此,当时用《周易》求占,是否用《易传·系辞上》"大衍之数"章所载的揲算方法起卦,变卦规则是否就是九六变,七八不变,以及按怎样的办法索取释占繇辞等等,似乎仍是需要考证的问题。事实上,有关筮法上的许多细节,都是通过师传口授的方式传承,并不录于文字,因而西周和春秋时期《周易》筮法的形态,今人已很难获得

详细的了解，只能根据已有的资料对一些主要的环节做相应的考证与推测。

在现有的文献材料中，有关揲算方法的记载，以成书于战国时期的《易传·系辞上》“大衍之数”章的内容为最早。《汉书·律历志第一上》曾论及“大衍之数”，但与行占无关。北周数学家甄鸾著有《五经算术》，书中对揲算成卦的方法做了说明，是目前所知较早的揲算注解。用“大衍之数”章所载的揲算方法起卦的详细说明，至唐贞观十六年（公元 642 年）才见于孔颖达《周易正义》的注疏中。一般认为，关于揲算的文字记录出现的时期比揲算定型的时期要晚得多，因而《左》、《国》筮例所用的成卦算法就是《系辞上》所记载的“大衍”算法。

变卦规则的文字记录出现更晚。先是北宋学者欧阳修在《明用》篇中说：“《乾》爻七九，九变而七无为，《易》道占其变，故以其所占者名爻。《坤》爻八六，六变而八无为，亦以其占者名爻。”这段话是用变卦规则来解释《乾》卦何以用“九”作爻题名称，以及《坤》卦何以用“六”作爻题名称。虽然欧阳修的本意不是介绍变卦规则，但他对九、六所做的易学解释却显示出变卦规则是由来已久的做法。后来朱熹和蔡元定在《易学启蒙·考变占第四》中说：“用九、用六者，变卦之凡例也。”他们还进一步给出了按变卦规则索取释占繇辞的方法。从此以后，关于变卦占法便有了比较明确的文字记录。但春秋战国时期的索辞释占规则是否如朱、蔡所说，仍有待考证。

虽然揲算方法和变卦规则的文字记录均有晚出的现象，但《左》、《国》筮例中的“筮之，遇某卦之某卦”的模式历来都被释为变卦，其中的“筮”应当就是传世揲算。所以一般认为“大衍之数”章所载的揲算方法和九六变而七八不变的变卦规则早已用于《左》、《国》筮例，因而它们定型的时期不会晚于春秋，甚至

有可能更早。

关于《左》、《国》所用筮法，向来都有学者关注或研究，也有学者直接就用传世筮法去探讨春秋及以前的相关课题。晚近的例子有：清初学者毛奇龄著《春秋占筮书》三卷，他说：“及书成而《易》义明，即占《易》之法亦与之俱明。”尚秉和是民国时期学者，他将毛氏的资料加以扩充，在《周易古筮考》中辑录了百余古代筮例，称：“揲蓍之法灿然大备。”[1]关于《左》、《国》中的占筮，他们都是从筮例所引《周易》经文和释卦细节推断当时所用已是传世筮法。

朱伯崑先生说：“《易传》提出的揲蓍成卦说，是大体可信的。”[2]

李学勤先生也认为“《左》、《国》所载有情节原委，足以推知当时筮法”就是传世的《周易》筮法，并用变卦占法推考中方鼎的筮铭（图6－1）。中方鼎属周初昭王时器，是北宋重和元年（公元1118年）于今湖北孝感出土的“安州六器”之一。该器铭文之末铸有两条并列的数字：七八六六六六和八七六六六六，历代学者均不识其意。李先生认为这是当时的《易》占筮算记录，并模仿《周易》变卦规则的方式将它们释为遇《剥》之《比》，是二爻变。然后将《周易》《剥》卦六五和上九两条爻辞的传统释意与铭文所记之事对照，结论为：“方鼎铭没有明言《周易》，无法绝对判定用的是《周易》，不过用《周易》解释竟如此符合，恐怕不是偶然的。由此看来，《周易》的经文确可能在周初业已存在。”[3]如果李先生的考证不错，同时还能说明变卦占法已见用于周初的占筮，不过变法不同，因为方鼎筮铭所示是七八变，六不变，而定型的变卦规则是九六变，七八不变。当然，方鼎铭文后面所附两组筮数中作为本卦的那一组筮数的筮得方法如何，仍是需要考证的问题。或者说，目前还没有证据足以表明这

条方鼎筮铭是用《易传·系辞上》“大衍之数”章的方法揲得。

釋文

隹十又三月庚寅
王在寒餗王令大
史兄褔土王曰中
兹褔人入史易于
珷王乍臣今兄畀
女褔土乍乃采中
對王休令𪔂父乙障
隹臣尚中臣七八六六六六　八七六六六六

图6－1　中方鼎铭文（西周早期），引自濮茅左《楚竹书周易研究》

6.1.2 从概率统计角度所做的推考

现在，我们尝试用数学方法证明《左》、《国》中的《周易》占例使用了传世揲算方法和变卦规则。我们先假定传世揲算和变卦规则已见用于《左》、《国》中的《周易》占例，由此统计出当时筮算揲得结果数的出现频率，以及统计出相关的阴阳二爻、本卦卦象和之卦类型的出现频率。然后将这些频率值与理论计算得到的四个概率指标相对照。结果发现，除了之卦类型这一项因所取筮例过少而有较大偏差以外，其余三项均与概率指标有着较好的符合程度(参看第 5 章的相关内容)。这种情况已能说明前面所做的假定应当是正确的。为了减少这种推考方法的偶然性，笔者曾对多种类似的揲算和变卦方案做了试算，发现要在模仿古代 10 进制、100 以内正整数的四则运算，以及必须使用筹策工具的条件下，构造出与《左》、《国》中的《周易》占例符合得更好的配套规则，几乎是一件不可能的事情。这样，本书就用概率理论为学者们所作的，传世揲算方法和变卦规则均见用于《左》、《国》中的《周易》占例的判断，提供了一个来自数学领域的旁证，从而证明了在春秋时期的《周易》占筮中使用的就是传世揲算方法和变卦规则。

注意到西周晚期，周室日衰，进入春秋以后，周王室已难以保持过去的礼仪，管理部门对王室的卜筮事宜也逐渐失去了有效的控制。出于谋生等原因，一些熟知具体操作规程的卜筮人员开始流亡于各诸侯国的王室或民间。这种情况恰好使得原为周人所用的《周易》得到了广泛的传播。《左传 · 庄公二十二年》记载的发生于陈厉公二年(公元前 705 年)的那次占筮，就是一位在周王室做史官的占筮家携带《周易》为陈侯所筮，其文为："周史有以《周易》见陈侯者，陈侯使筮之。"《史记 · 陈杞世

家》和《史记·十二诸侯年表》均记有此事。考虑到周史带出的《周易》应在周王室中已使用了一定的时间，不太可能是新近的发明或刚刚才定型的改进之作，其中所使用的揲算方法和变卦规则应当早已定型。而且这次占筮的时间距西周末年的公元前771年仅66年，按照古代相对缓慢的生活节奏，将揲算方法和变卦规则定型时期的下限推溯到西周晚期应该是可以的。

至此，关于传世的《周易》占法，大体上可以有以下认识：

1.《周易》“经文的形成很可能在周初，不会晚于西周中叶”。[4]

2. 六十四卦的形成可能不迟于西周晚期，即《易经》成书可能不迟于西周晚期。

3. 揲扐算法的定型时期应不迟于西周晚期。

4. 变卦规则的定型时期应不迟于西周晚期，但索辞释占规则待考。

这样看来，作为一种比较成熟和稳定的占筮方法，传世形态的《周易》占法可能定型于西周，定型时期的下限不迟于西周晚期。当然，以上认识是在现有条件下做出的推测，并非定论，其中有许多问题有待考古新材料的出现和深入的研究才能解决。

6.2 天星观、包山和葛陵卜筮简中的卦象是使用《周易》占法的记录

6.2.1 出土卦象简介

1. 1978年江陵天星观楚墓出土一批竹简，其入葬时间断为公元前350年左右，为战国中期。其中的卜筮简记载了墓主人有关贞问“侍王”是否顺利、贞问忧患和疾病的吉凶，以及贞问

迁居新室能否“长居之”等方面的事宜，但没有引用繇辞，也没有说明所用的占筮方法。简文中有占筮卦象，据张政烺先生《易辨》一文中的介绍：

> 我见到的有八处，皆于一行之中两卦并列，实际上是十六个卦，当有九十六个爻。其所用数字最常见的是一和六，约占十分之九，仔细观察也有七、八、九这三个数字，但是很少，不过十分之一。

接着列写了其中的5例，共10卦。如果将这些卦象视为筮数，在10卦60数中，一和六占57数，七、八、九则各有一数出现。张先生认为：

> 在这些卦例中，一、六出现次数最多，已经不是筮数的自然现象，而是作为奇偶符号。七、八、九这三个数字如果是筮用数字，至少当出现三十多次，却如此罕见，这是什么原因呢？我的看法，当时的卦爻以一、六为主体，而使用的筮数原是有七、八、九的，到写成卦画时，一般都变成一和六了，在这几处偶然出现，或是由于某种原因（尚不明白）而保留着的……这八处易卦，都是两卦平列，使人很容易想到是卦变。[5]

2. 1987年，荆门包山楚墓（墓主人官居左尹，卒于楚怀王十三年，即公元前316年）出土一批战国竹简，其中的占筮简中有6枚录有两卦一组的卦象，共得6组12卦，每组卦象均为左右各一卦，竖向并列画出，每卦都是6爻，共有72爻。多数卦象的内卦和外卦之间不留间隔。阳爻均做一横画，共有34爻。阴爻均做两斜画，分三种形态：上部相连，有31爻；上部分开，有6爻；两斜画交叉，仅有1爻。[6]有学者认为阳爻应释为数字一，阴爻应视其形态分别释为数字六、八和五，因而它们都是筮数，不

是卦象。李学勤先生指出，这是一种误读，并论证它们应当是卦象，不是筮数。也就是说一横画都是阳爻，两斜画都是阴爻 。[7] 由于简文中没有引用繇辞，也没有注明占筮的方法，因而不能肯定是用《周易》占筮时得到的卦象。但从每卦6爻两卦并列的画法来看，很可能就是《周易》特有的变卦。当然，这个推测是否正确，还需要做进一步的讨论。

3.1994年新蔡葛陵楚墓（墓主人平夜君成，是楚国封君，卒于楚肃王四年，即公元前377年）出土一批战国竹简，共得1571枚，大多数简文属于卜筮祭祀记录，其中涉及《易》卦者计14简，简文中录有两卦一组的卦象，共得15组30卦。其中完整者有12组24卦144爻，其余3组6卦有残损，可见的爻符有18个。每组卦象均为左右各一卦，竖向并列画出，每卦均为6爻。几乎所有卦象的内卦和外卦之间都有间隔，以断开形式画出。爻符画法与包山简类似，阳爻均为一横画共60爻。阴爻均为两斜画共102爻，其中大部分为上部相连，有92爻；上部分开的有5爻；两画交叉的有5爻。[8]类似于包山简，这些卦画也曾被误读为筮数。李学勤先生论证后指出，它们应当是卦象符号，不是数字 。[9]由于简文中既没有引用繇辞，又没有注明使用的占筮方法，因而不能肯定这些卦象是用《周易》占筮时的记录。但从每卦6爻两卦并列的画法来看，估计也应与传世揲算方法和《周易》变卦规则有关。

6.2.2 从概率统计角度所做的推考

在本书第2章2.2节，已对这些占筮记录是卦象而非筮数的情况有过介绍。现在再从概率统计的角度做进一步的推考。

这三批占筮简的入葬时期都在战国中期，其书写年代比较接近，而且它们都出自楚墓，在地域上也有共性，具备统一讨论

的基础条件。注意到这些竹简中的卦象都是实际占筮的记录，应非人为杜撰之作，而且共得完整的卦象23组46卦276爻，另有残存卦象3组6卦18爻，已有不少的数量，如果偶然因素不是太多的话，当可从中统计出可供参考的数据资料。具体讨论如下：

假定：三批楚简中的占筮记录都是卦象；成卦算法都是《易传·系辞上》"大衍之数"章的传世揲算；都按《周易》变卦规则画出两卦一组的卦象；每组卦象的左卦为本卦，右卦为之卦。这样，便可依据九六变，七八不变的变卦规则，反推出本卦成卦时对应的揲算结果数，然后进行分类统计，并计算出相应的统计频率。统计过程参看表6-1和表6-2。

表6-2的最后一栏列出了本书第5章中用概率理论算出的三种概率值：

1. 本卦揲算结果数的出现概率；

2. 7种之卦类型的出现概率；

3. 本卦中阳爻和阴爻的出现概率。

将实占统计频率与理论概率相比较，发现对应的三种统计频率都相当明显地倾向于这三个概率指标。此外，因为六十四卦中每一种卦象的出现概率都是1/64，所以还有第四个概率指标也应讨论，也就是说，一般情况下本卦的卦象应倾向于均匀出现。在表6-1列出的23个完整的本卦中，共出现了17种不同的卦象，其中《剥》卦出现3次，《需》、《师》、《同人》、《离》4种卦象各出现2次，其余的12种卦象均出现1次，没有发现某些种类的卦象特别多出的现象，表明本卦卦象的筮得是比较均匀的。

表6－1　天星观、包山和葛陵楚简中的实占卦象与推得的筮数

天星观简	— 9 - - * — 9 - - * — 7 — — 9 - - * — 7 — - - 8 - - 《姤》之《解》 三爻变	— 9 - - * — 7 — — 7 — - - 6 — * — 9 - - * - - 8 - - 《讼》之《咸》 三爻变	— 7 — - - 6 — * — 7 — - - 6 — * - - 6 — * — 7 — 《噬嗑》之《乾》 三爻变	— 9 - - * - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - 《剥》之《坤》 一爻变	— 7 — - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - 《剥》之《剥》 静爻	
包山简	- - 8 - - — 9 - - * — 7 — - - 8 - - — 9 - - * — 9 - - * 《兑》之《豫》 三爻变	- - 6 — * - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - — 7 — — 7 — 《临》之《损》 一爻变	— 7 — - - 8 - - - - 8 - - - - 6 — * - - 6 — * - - 8 - - 《剥》之《蛊》 二爻变	— 9 - - * - - 6 — * — 7 — — 9 - - * - - 8 - - — 7 — 《离》之《随》 三爻变	— 7 — — 9 - - * — 9 - - * - - 8 - - - - 8 - - — 7 — 《无妄》之《颐》 二爻变	- - 8 - - — 9 - - * - - 6 — * — 7 — — 7 — — 9 - - * 《需》之《恒》 三爻变
葛陵简	— 9 - - * — 7 — — 9 - - * — 9 - - * - - 8 - - — 9 - - * 《同人》之《比》 四爻变	- - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - — 7 — - - 6 — * 《师》之《临》 一爻变	- - 6 — * — 9 - - * — 7 — — 7 — — 9 - - * - - 8 - - 《大过》之《旅》 三爻变	- - 6 — * — 7 — - - 8 - - — 9 - - * — 9 - - * — 9 - - * 《需》之《观》 四爻变	- - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - — 9 - - * - - 8 - - 《师》之《坤》 一爻变	- - 6 — * — 9 - - * — 9 - - * — 9 - - - - 8 - - - - 8 - - 《咸》之《剥》 四爻变
	— 9 - - * - - 8 - - - - 8 - - - - 6 — * - - 8 - - — 9 - - * 《颐》之《谦》 三爻变	— 9 - - * — 9 - - * — 9 - - * — 7 — - - 8 - - - - 8 - - 《遁》之《谦》 三爻变	— 9 - - * — 9 - - * - - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - - - 6 — * 《观》之《复》 三爻变	— 7 — - - 6 — * — 9 - - * — 7 — - - 8 - - — 9 - - * 《离》之《渐》 三爻变	- - 6 — * - - 6 — * - - 6 — * - - 6 — * - - 6 — * - - 8 - - 《坤》之《姤》 五爻变	— 9 - - * — 7 — — 9 - - * — 9 - - * - - 8 - - — 9 - - * 《同人》之《比》 四爻变
	□ □ - - □ — 9 - - * — 7 — - - 8 - - — 9 - - *	- - 8 - - - - 8 - - - - 8 - - □ □ □ □ □	□ □ □ □ □ □ □ □ □ - - □ - -	注：左边为本卦，右边为之卦。本卦爻符旁的数字为反推得到的揲算结果，发生变化的爻符在之卦旁用*号标出。		

表6-2 天星观、包山和葛陵楚简中实占卦象的三种统计频率与理论概率比较

统计对象		本卦的揲算结果数				之卦的7种类型							本卦的阳爻和阴爻	
		6	7	8	9	静爻	一爻变	二爻变	三爻变	四爻变	五爻变	六爻变	阳爻	阴爻
天星观简	出现个数	4	8	12	6	1	1	0	3	0	0	0	14	16
	统计频率	0.1333	0.2667	0.4000	0.2000	0.2000	0.2000	0	0.6000	0	0	0	0.4667	0.5333
包山简	出现个数	5	10	12	9	0	1	2	3	0	0	0	19	17
	统计频率	0.1389	0.2778	0.3333	0.2500	0	0.1667	0.3333	0.5000	0	0	0	0.5278	0.4722
葛陵简	出现个数	12	10	29	28	0	2	0	5	4	1	0	38	42
	统计频率	0.1519	0.1266	0.3671	0.3544	0	0.1667	0	0.4167	0.3333	0.0833	0	0.4750	0.5250
合计	出现个数	21	28	53	43	1	4	2	11	4	1	0	71	75
	统计频率	0.1448	0.1931	0.3655	0.2966	0.0435	0.1739	0.0870	0.4782	0.1739	0.0435	0	0.4863	0.5137
理论概率值		0.0517	0.2888	0.4483	0.2112	0.0231	0.1234	0.2714	0.3125	0.1973	0.0641	0.0082	0.5000	0.5000

这批战国实占卦象在四个概率指标上都有很好的符合程度,已不可能是偶然现象。这个结果使我们有理由相信前面所做的假定的确是成立的。这样,本书就用近代数学中的概率理论为天星观、包山和葛陵楚简中的卦象均由传世的揲算起卦方法和《周易》变卦规则画出的推测,提供了一个佐证。由此可见,在战国时期,《周易》占法的确流行于楚国。

显然,这个结论与历代不少学者关于春秋战国时期各诸侯国广泛流行《周易》占法的认识是协调的。反之,如若这样多的战国筮例所记都还是筮数的形态,而且与《周易》占法不符的话,将会对《周易》占法广泛流行于春秋战国时期各诸侯国的判断,形成一个很有分量的质疑。

6.3 《易林》释占辞条的出现概率并不均衡

西汉昭帝时(公元前86~前74年)的焦延寿是商瞿受《易》于孔子之后的汉代易学传人之一,(详见《史记·仲尼弟子列传》和《汉书·儒林传》)他受《周易》卦占启发,创制了一种改进的占筮方法,其书名为《焦氏易林》。《四库全书·子部》录入此书时,简称为《易林》。《易林》模仿《周易》,用《系辞》"大衍"章的揲扐算法起卦,按六十四卦编辑释占用的辞条。又按传世的变卦规则,在每一个本卦之下均附六十四个之卦位置,每个位置配一个辞条,因而共有 $64^2=4096$ 条释占辞文。焦氏编写的这些辞条均为四言韵语,每条都给出较为明白易懂的吉凶判断。其意图在于便于释占:即面对繁杂世事,直接给出数千种吉凶判辞,尽量避免了用《周易》释占时存在不少需要变通附会的麻烦。应当说,《易林》是一种便于普及的卦占方法。尽管用《易林》问占"最为有准"(语见《四库全书·子部·较定〈易林〉原序》),然而事实上却流传有限。到唐代以后,与《易林》配套的

《易林变占》十六卷即告失佚，可见其影响不能与《周易》相比。之所以如此，在各种可能的原因中，《易林》辞条出现的概率（实占中即是辞条出现的频率）明显不均，应是比较重要的一个。

按照本书第 5 章 5.3.3 的分析，可以用 4096 个之卦中每一个之卦的出现概率来描述《易林》辞条的出现概率。所用计算式与本书第 5 章中的（1）式相同，只是 $P(B_i)$ 可写为 P（某卦之某卦）的形式，以及所用参数 a_{ij} 应调整为该卦象的对应爻数。不难看出，各个之卦的出现概率一般有不同的数值，（也有不少相同的情形）其中出现概率最高的是"《坤》静爻"，即"《坤》之《坤》"的情形，出现概率最低的是"《坤》六爻动"，即"《坤》之《乾》"的情形。分别计算如下：

$$\begin{aligned} P(\text{《坤》之《坤》}) &= [P(6)\times 0 + P(7)\times 0 + P(8)\times 6 + P(9)\times 0] \\ &\quad \div 6144 \\ &= 0.4483 \times 6 \div 6144 = 0.000437793。 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{《坤》之《乾》}) &= [P(6)\times 6 + P(7)\times 0 + P(8)\times 0 + P(9)\times 0] \\ &\quad \div 6144 \\ &= 0.0517 \times 6 \div 6144 = 0.000050488。 \end{aligned}$$

两者相差达八倍之多。只要稍加留心，凡熟悉实际占筮操作的人，在无须具备概率知识的情况下，都不难发现这两种情况将有多出和少出的明显差异。

6.4 《太玄》卦象的出现概率并不均衡

6.4.1 《太玄》起卦算法简介

西汉杨雄创制的《太玄经》（见《四库全书 · 子部》，简称《太玄》），是继《易林》后模仿《周易》的另一种古代卦占，但其流传范围较为有限，对中国古代文化的影响远不能与《周易》相比。

《太玄》的卦象称为“首”，卦象中各个位置的爻符也有专用的名称，为便于叙述，本文仍采用具有同样含意的“爻”，“卦”，“卦象”等说法。《太玄》采用的爻符共有 3 种，每卦均由 4 个爻符组成，例如，《干》的卦象为“”。这样，在《太玄》中一共有 $3^4=81$ 种卦象，形成了一套关于经文辞条的编码索引系统。杨雄为每一种卦象配置了 9 条筮辞，并称之为“赞”，因而一共有释卦赞辞 $9\times81=729$ 条。这些辞条构成了《太玄》的经文。《太玄》所用成卦规则与《周易》类似，其成卦操作程序如下：用策 33 根，经过分 2、挂 1、揲 3、归扐，以及两次变易，再将所得揲策总数除以揲策数 3，即可得出一个结果数，然后据以确定一个爻符。重复 4 轮这样的揲算，一共 8 次变易，即可从上至下地画出 4 个爻符，从而确定出 81 种卦象中的 1 种卦象。按照这样的规则，由于分 2 时的随机性，每一轮揲算得出的结果数共有三种可能，即所得结果数将是 7、8、9 三数中的某一个数。如果得 7，对应的爻符为——；得 8 则对应于— —；得 9 便对应画出 。使用本书第 5 章 5·2 节的方法可以求出 7、8、9 这三个可能得到的结果数的出现概率。

6.4.2 《太玄》爻符出现概率的计算

由于定出一个爻符的一轮揲算是独立的，所以只需对一轮揲算进行分析就可以了。下述概率分析的前提条件是分二必须是随机完成的，不能加入人为因素。从《太玄》的揲算规则来看，这个条件能够满足。《太玄》一轮揲算的过程可用各次变易的参揲策数变化情形的枝形关系表示如下：

$$33\begin{cases}33-6=27\begin{cases}27-6=21\\27-3=24\end{cases}\\[2ex]33-3=30\begin{cases}30-6=24\\30-3=27,\end{cases}\end{cases}\qquad\begin{cases}21\div3=7, & \longrightarrow & \text{——}\\[2ex]24\div3=8, & \longrightarrow & \text{— —}\\[2ex]27\div3=9。 & \longrightarrow & \text{- - -}\end{cases}$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots$$

第 1 次变易　第 2 次变易　　结果数　　对应的爻符

显然,得结果数 7 和 9 的渠道都只有一种,而得 8 的渠道则有两种,即:

$33-6-6=21$, $21\div3=7$;

$33-6-3=24$, $24\div3=8$;

$33-3-6=24$, $24\div3=8$;

$33-3-3=27$, $27\div3=9$。

由于揲算过程中可能出现的扐策数有 6 和 3 两种,变易后,参揲策数将发生相应的变化,故还需要对 6 和 3 在 33、30 和 27 三种参揲策数下的出现概率进行分析,才能求出三个结果数的出现概率。不妨按表 5-2 的形式,采用全举的方法列举出所有可能出现的扐策数(从略),便能得到以下结果:

33 策时,扐 6 的概率 $P_1 = 40/62$,(若固定每次都只从某一堆中挂 1,可得 $P_1 = 20/31$,显然并不影响概率计算。下同)扐 3 的概率 $P_2 = 22/62$;

30 策时,扐 6 的概率 $P_3 = 36/56$,扐 3 的概率 $P_4 = 20/56$;

27 策时,扐 6 的概率 $P_5 = 32/50$,扐 3 的概率 $P_6 = 18/50$。

根据概率理论中的乘法原则和加法原则,7、8、9 三种结果数的出现概率为:

得 7 的概率:$P(7) = P_1 \times P5$

$= 40/62 \times 32/50 = 0.4129$;

得 8 的概率:$P(8) = P_1 \times P_6 + P_2 \times P_3$

$$= 40/62 \times 18/50 + 22/62 \times 36/56 = 0.4604;$$

得 9 的概率：$P(9) = P_2 \times P_4$

$$= 22/62 \times 20/56 = 0.1267。$$

由此可知，8 的出现概率最高，而 9 的出现概率最低，相差几达 4 倍之多。可以肯定，在使用《太玄》的占筮活动中，含－－的卦象必然多出，而含---的卦象必然少出。即使不做概率计算，积累占例较多之后，人们必然会觉察到这种不同类型的卦象有出现频率明显不均的现象。《太玄》在中国古代社会中流传有限，除了别的因素之外，也许与这种占法设计中无法避免的卦象出现概率明显不均的缺陷有关。

注释：

[1]尚秉和：《周易古筮考》，光明日报出版社 2006 年 1 月版，第 1 页。

[2]朱伯崑：《周易知识通览》，齐鲁书社 1993 年 12 月版，第 5～6 页。

[3]李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 210～219 页。

[4]李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 18 页。

[5]张政烺：《易辨》，载《中国哲学第十四辑》，人民出版社 1998 年版，第 6～7 页。

[6]湖北省荆沙铁路考古队：《包山楚简》，文物出版社 1991 年 10 月版。

[7]李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 276～278 页。

[8]河南省文物考古研究所：《新蔡葛陵楚墓》，大象出版社 2003 年 10 月版。

[9]李学勤：《周易溯源》，巴蜀书社 2006 年 1 月版，第 280～284 页。

第 7 章 《周易》揲算是同类算法中的最佳选择

《易》占使用的揲扐算法是西周占筮家们的一项发明。本书第 4 章研究了这种算法的数学规律，得出了《易》占揲算模式下一般性命题的一种表述方式。在此基础之上，本章试图通过对揲扐算法中各相关参数的比较分析，讨论《周易》揲算是否为一种偶然凑巧发现的算法，从应用于占筮的目的来说，在同类算法中是否还有更好的算法设计可供选用等类似的问题。

7.1 问题的提出及揲算命题的形式

7.1.1 问题的提出

在流传下来的古代文献中，几乎看不到有关揲扐算法发明过程的记载，在已有的考古发现中，也找不到直接与之相关的材料。因而关于揲算是怎么发明出来的这个问题，只能做一些间接的推测。传世古籍中通常都说《易》占以及揲算是古代圣人的通神之作。例如《易传 · 说卦》就说：“昔者，圣人之作《易》也，幽赞于神明而生蓍，参天两地而依数。”便是如此。古人出于强化占筮的神秘性和权威性，对占筮术中最为关键的筮算的发明加以神化的做法，是可以理解的。

在缺乏深入研究的条件下，揲算给人的印象往往是愚昧和迷信背景下的一种孤立的偶然发现，它在占筮应用中有如此之

好的神秘文化效果，往往被解释为一种巧合。郭沫若先生在《周易时代的社会生活》一文中说：

> 数学的程度渐渐进化，晓得三三相重，八八更可以得六十四种不同的方式了，于是乎数学的秘密更加浓重起来：一百九十二片的长砖（阳爻）和三百八十四片的短砖（阴爻）便一片一片地都发出神秘的声音，神秘的天启来了。这便是重卦，这便是系辞，这便是《周易》之所以产生。它的父亲是偶然的凑巧，它的母亲是有意的附会。它的祖父不消说是蒙昧的无知。[1]

虽然文中“数学的秘密”是指 64 种卦象和所用的阴阳爻符，尚未明指揲算方法，但这种成卦用的算法自然是《周易》占筮术中的一部分，而且是“数学的秘密”最为集中的部位，因而，按这段文字的意思，揲算的发明势必也属于“偶然的凑巧”。应当说，这是郭先生在对《周易》中“数学的秘密”尚无深入认识的情况下做出的一种推想。

在今天看来，包括揲算这个关键环节在内的《周易》占法的形成，与相应时代的社会生活状况有着密切的联系。作为一种占筮方法，《周易》的形成历经了漫长的改进和完善定型的过程，把它说成是古圣人的通神之作，或者是某个占筮家的偶然发明，都是不确切的。但是，由于考古材料的缺乏，揲算果真是一种偶然凑巧发现的算法吗？从应用于占筮的目的来说，在同类算法中还有更好的方法可供选用吗？类似问题的回答是有困难的。所以，在常见的讨论《周易》占筮的书籍中，通常看不到对这类问题的解答。本书第 4 章对一般性的揲算命题进行了归纳和解读，在分 2 挂 1 的情况下，用揲策数 M，变易次数 C，结果数 R，以及取值范围的约束条件 K 来描述参揲总策数 S 的取值，使我

们有条件对各种不同的同类算法进行比较研究。通过对这些算法的系统的比较分析，笔者将对上面提出的问题进行一些探讨。

7.1.2 揲算命题的形式

1. 用于《周易》占筮的揲算命题可记为命题 A，并表达为下述形式：

命题 A：参揲策数为 49 策时，可以进行分 2、挂 1、揲 4、归扐的计算，经过 3 次变易后的结果数组为{6，7，8，9}。

关于命题 A，有如下认识：

首先，命题 A 是一则真命题。本书第 3 章曾对此命题的正确性做过介绍。关于揲算，唐初学者孔颖达注疏说："初一揲，不五则九，是一变也。第二揲，不四则八，是二变也。第三揲，亦不四则八，是三变也。"南宋学者朱熹和蔡元定还指出第 1 变时，"得五者三，得九者一。"第 2 变和第 3 变时，均为"得四者二，得八者二"。由于在这套算法中除了古代占筮家们总结出来的这些情形之外，再无其他可能，因而孔、朱所录实质上是命题 A 为真命题的全举法证明。

其次，命题 A 是一则特殊命题。传世揲算使用固定的 49 策，算法规则中涉及的分 2、挂 1、揲 4、3 变成爻等环节都有确定的参数。而且由于分 2 环节的随机性，每一轮揲算只能从 6、7、8、9 四种结果数中得出一种，不可能出现其他的数值，因而命题 A 不是一般性命题，而是一则特殊性命题。对于周代的占筮家们来说，发明揲算的目的是用于占筮，命题 A 已能很好地满足要求，没有寻求一般性算法的必要。当然，当时也不具备建立一般性算法的能力。在揲算的发明过程中，可能会有不同参数下的算法比较，甚至还会将其他算法模式下的算法纳入比较和选择的范围，但它们都是特殊算法之间的对比，性质上均不涉及一

般性命题的归纳。

2. 关于命题 A 的一般性解读,可称之为命题 B。根据本书第 4 章 4.3.2 的结论,命题 B 包含了两个子命题,不妨称为命题 B_1 和命题 B_2,兹复述于下:

命题 B_1:参揲策数为 $S=(R+2C)M+K$ 时,可以进行分 2、挂 1、揲 M、归扐的计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R, R+1, \cdots\cdots, R+C\}$。其中,$(3-M)\leqslant K\leqslant 1$;$C=1$ 时,$M\geqslant 2$;$C>1$ 时,$M\geqslant 3$。

命题 B_2:参揲策数为 $S=(R+2C)M+2$ 时,可以进行分 2、挂 1、揲 M、归扐的计算,经过 C 次变易后的结果数组为 $\{R+1, R+2, \cdots\cdots, R+C\}$。其中,$M\geqslant 2$。

命题 B 中除 K 的取值可以是 1、0 和负整数之外,其余各参数都取正整数。

与命题 A 相比,命题 B 保留了分 2 和挂 1,其他参数都用字母代替,可以有各种不同的取值组合,因而是一种一般性的命题。只要符合约束条件,每确定一组参数的取值,便可以得到一种特殊命题。例如,取 $M=4$、$C=3$、$R=6$、$K=1$,命题 B_1 就成了命题 A。本书第 4 章用现代数学方法证明了命题 B_1 为真命题时,也就证明了命题 A 为真。又如西汉杨雄创制的《太玄》占法中使用的起卦算法就是命题 B_1 中当 $M=3$、$C=2$、$R=7$、$K=0$ 时的一种算法。显然,《太玄》的揲算命题也是一则特殊真命题。再如孔国平先生在《中国数学史大系·第一卷》中提出的"西周筮法假说",就与命题 B_1 中,当 $M=4$、$C=3$、$R=5$、$K=0$ 时的一种特殊算法有关[2](参看本书 8.1.1)。

7.1.3 比较分析的主要参考标准

有了命题 B,理论上就可以列出揲算模式下所有的具体算

法方案。将这些算法与命题A给出的算法进行对比,即可发现其间差异,从而为我们关于命题A的研究提供一些新的信息。当然,要比较分析就必须有明确的参考标准。大体上,可以将主要的参考标准归结为以下两条:

1. 用于占筮的算法要有尽量强烈的神示效果。从神秘文化产生的背景条件和占筮特点来说,用来探测神意的方法要尽可能地让求占者感到这是一种超出了人的意志,并且可以沟通于神明的途径。占筮家们肯定要优先选用他们认为神示性最强的算法,并将这方面的考虑落实到各个具体的筮算细节中。

2. 用于占筮的算法要具有良好的操作性。在没有纸张的商周时期,对事件的记录存在技术上的困难,现在能看到商周先民刻写在甲骨上的至为简略的卜辞及其他文字已属不易,要想将复杂的占筮计算过程用文字录写的方式来完成,显然是很难做到的。这样,就数学演算来说,用筹策为算具的操作性算法便被发明出来了。这是一种靠双手操作完成的计算办法,在《易》占筮算中,每1根策只代表数1,当涉及的数在量级上过大时,比如成千上万时,所用策数就会多得不能用双手去顺利地点揲计算,因而有操作上的可行性限制。当然,在可以操作的条件下,还要讲究神示效果。如果用策太少或算法设计过于简单,其神示性就好不起来。以《易》占成卦的目的来说,揲算操作表现为从有奇偶含义的两种爻符中定出一种。要达到这个目的,可以有许多种操作方案的设计,其中最简单的便是凭硬币(或者贝壳、木片之类均可)掷出后的正反,或者骰子抛出后上表面所现点数的单双来定爻等等。只是这些方式在设计上太少玄机,用于民间杂占尚可,一般不会用于王室贵族的占问。反之,如果占筮操作过于复杂,神则神矣,但出差错的可能性会相应增大,甚至会出现用双手难于操作的情况,因而都是不可取的。这样,筮

算操作方面的评价标准应该是繁简合度。

7.2 利用命题 B 进行的比较分析

7.2.1 关于变易次数 C 的比较分析

1. $C=1$ 时，由命题 B_1，不论参数 M、R、K 取什么数值，只要揲算符合命题 B_1 的要求，得到的结果数必为 $\{R, R+1\}$，共有两个可能出现的结果数。由于这两个结果数是连续的两个正整数，因而它们必是一奇一偶。如果简单地赋予它们吉凶含义的话，作为占筮判据应该是可以的。汪宁生先生在《八卦起源》一文中就介绍了解放以前西南少数民族中流行的，以投物的反正或得数的奇偶判断吉凶的“数占”，文中说：

> 西盟佤族有一种名叫“司帅报克”的占卜法，其法是用小木棒在地上随便划许多短线条，然后计其总数，看是奇数还是偶数，奇数主凶，偶数主吉。过去佤族巫师（“魔巴”）即用此法卜问盖房是否相宜，是否需要做鬼，等等。[3]

很可能原始的占筮方法中曾有过直接凭筮得结果的单双论吉凶的做法，因而早期的揲算也许就萌生于这类最为简单的求数方式。从本书第 2 章 2.2 节关于卦象形成过程的讨论来看，由于商周筮数中同时出现的数字种类一般都多于两种，而且只有两种数字时，所用两数也并非连续的两种整数。所以，从出土筮数的筮得情形分析，均不是采用命题 B_1 在 $C=1$ 时的算法。很可能这类最简单的算法曾用于商代以前，发展到商周时代已是相对复杂了许多。就揲算而言，早期的揲算很可能是由命题 B_1 在 $C=1$ 时的情形下发展而成，当古代占筮家们通过增加变

易次数而找到更令人称奇的算法时，必会从强化神示性的需求出发，将 $C=1$ 的简单算法淘汰掉。

2. $C=2$ 时，由命题 B_1，必有 $\{R,R+1,R+2\}$ 的结果数组。显然，这3个可能出现的结果数只能有2奇1偶或者1奇2偶两种情形发生，直观上已显示出可能出现的得数在奇偶分布上的不均。如果所用占法与得数的奇偶有关，或者要将结果数依奇偶转化为阴阳两种爻符，肯定就不能采用这种算法。如果直接用这样算得的三种结果数作占，（在早期占筮中很可能出现过类似的做法）或者像杨雄作《太玄》那样，设计一种由3种爻符构成的卦象系统，仍存在着本书第5章中曾指出的筮数或卦象出现概率明显不均的问题。古代占筮家们在占筮实践中是很容易发现这种不均衡的现象的，因而在找到了更满意的算法之后，自然就会将其淘汰。类似地，当 C 取其他偶数时，结果数本身的奇偶构成是不均等的，而且各数的出现概率也各不相同，不论怎么设计，所得算法都不会令人满意。由此可见，变易次数 C 不能取为偶数。古代占筮家可能并无这样清晰的认识，但从流传下来的占筮方法来看，尚还没有发现 $C=4$ 以及其他偶数的情形。

3. $C=5$ 时，由命题 B_1，共有6个可能出现的结果数。虽然它们必为3奇3偶，奇偶分布是均等的，但因变易次数过多，操作趋于繁琐，而且所使用的筹策数也相应较多，操作上也不见得利落，再加上所得结果数的种类偏多以后，还会使释占趋于复杂，所以并不见得是最好的算法方案。类似地，古代占筮家们肯定不会选用大于5的其他奇数作为 C 值来设计算法方案。

4. 毫无疑问，由 $C=3$ 所确定的3变成爻算法，是依奇偶定爻符模式下最好的算法方案，这正是命题A的选择。此时，由命题 B_1 给出的结果数组是 $\{R,R+1,R+2,R+3\}$，对于《周易》占筮而言，就是 $\{6,7,8,9\}$。其构成为两奇两偶，所涉数字也不

多，在转化为阴阳爻符和据以释卦时，都不难处理。当 $C = 3$ 时，揲算操作的过程也显得很有节奏，既不像 $C = 1$ 时过于简单，又不像 $C = 5$ 时过于繁复，从直观上就显得比较合适。特别是在经过本书第 5 章给出的概率分析之后，发现 6、7、8、9 这四个数的出现概率虽然相差很大，但转化为阴阳二爻后，这两种爻符的出现概率却是相同的，都等于 0.5，进而使得 64 种卦象的出现概率都等于 1/64，没有某种卦象会特别多出或特别少出。这种情况对于占筮来说显然是很合用的。当然，古代占筮家不可能进行概率分析，但他们必然在实算中观察得到 7、8 两数多出，而 6、9 两数少出的现象。例如欧阳修在其占筮活动中就发现存在“及其筮也，七八常多而六九常少”（《欧阳修集 · 明用》）的事实。而将所得结果数归结为奇偶两类以后，则有使之均衡化的效果。这也许是古代占筮家们在早期揲算中曾直接录下筮数用于求占（参看本书第 2 章 2.2 节），而后来则将筮得之数依奇偶转化为阴阳二爻的一种极有可能的主要原因。

7.2.2 关于结果数组取值范围的比较分析

1. 结果数的取值为一位数的情形。

按命题 B_1，$C = 3$ 时必有 $\{R, R+1, R+2, R+3\}$，这四个结果数呈级差为 1 的等差数列。如果取 $R = 1$，结果数组就是 $\{1,2,3,4\}$，而相应的参揲策数在取 $M = 4$ 和 $K = 1$ 时，即为 $S = (R + 2C)M + K = (1 + 2 \times 3) \times 4 + 1 = 29$ 策。显然，这是一个数量偏少的策数。很可能早期的揲算所用策数也不会太多，其神示效果肯定不如策数多一些的算法来得好。在 $C = 3$，而取 M 为 4 的情况下，增大 S 值的有效方法就是增大 R 值。《周易》揲算选用的最大的一个结果数是 9，因而 $R = 9 - 3 = 6$，取 $K = 1$，使 S 增大为 49 策，应当是神示性较强的一种设计。

另一方面，当结果数组为{1,2,3,4}时，这几种结果数在写法上正如张正烺先生所说"都是积画为之"（参看本书第2章2.2.2节），如果按竖向顺序进行记录，必会产生相互混淆的问题。由此推测，早期的占法也许不做记录，因而有可能将这类算法用于占筮。但是后来产生了对算得的筮数进行记录的要求，为了避免记录的混乱，要么代之以某种符号，例如将奇数1、3都记为1，要么就得改进算法，使结果数的取值大于或等于5，以避开2、3、4诸数。从已发现的筮数的构成特点来看，古代占筮家们很有可能是兼而有之地调整改进着计算及记录的方法。总的趋势是将结果数的取值定在5~9的范围内，而数1的存在很可能是保留下来的一种记录符号，已不再是实际算得的筮数。

笔者估计，用9为最大的结果数的另外一个原因可能与9这个数的计数地位和神学地位有关。商代甲骨文显示，当时已使用10进制记数，9是1至10这十个最基本的数符中最大的奇数。一般认为商周之际已有了早期的筹算，人们可能已逐步掌握了某种用9种筹码符号表示数目的方法。由于逢10进位，因而在筹算计数系统中并无专用的数码10，这样，9就成了筹码数符中引人注目的最大的一个。此外，《周髀算经》是传世算书中较为古老的一种，如果书中所记商代遗民商高回答周公问时，所说的"矩出于九九八十一"确为周初之事，则商周之际已有乘法和除法计算时使用的九九口诀。九九口诀的存在，非常直观地通过计算规则的建立，强化了"九"的神秘感。周人承袭了商人的数学知识，9这个数在计数和数算上的特殊地位应当引起西周占筮家们的关注，进而被赋予了浓重的神秘色彩，占筮时求得的最大结果数为9，显然具有最好的神示效果。在先秦古籍中，可以看到不少与"九"有关的说法，例如《尚书·洪范》的"九畴"；《尚书·禹贡》的"九州"；《诗·长发》的"九围"、"九有"、

“九截”;《周礼·保氏》的“九数”等等,它们似乎都与“九”的计数地位和神学地位有关。

这样,从神示效果来判断,在结果数的取值为一位数的情况下,{6,7,8,9}应当是较好的选择。当然,结果数取值范围的确定也会有一个过程,从本书第2章2.2节介绍的商周时期的出土筮数来看,就有9这个数相当少的现象,而且不能肯定此时的数9是用传世的揲算方法求得。这种现象似乎表明传世揲算定型的时期应在西周中期以后。或者说,当西周中晚期的占筮家们找到了结果数为{6,7,8,9}的算法后,便用这种算法逐步取代了过去的那些算法。

2. 理论上,揲算结果数可以取为多位数,但这种较大的R值将带来两方面的不利影响,一方面是较大的R必然要求较大的S值,而参揲策数太多时会降低揲算时的操作性,甚至无法操作。另一方面,揲算过程具有一定的演示性,当揲算结果数偏大时,揲算过程无法做得比较干净利落,演示效果会变差,从而有损神示性。大体上,与一位数的取值范围相比较,结果数的多位数取法并无优势可言。

3. 如果按命题B_2,取$C=4$时必有形如$\{R+1,R+2,R+3,R+4\}$的结果数组。若取$R=5$,所得结果数组也是$\{6,7,8,9\}$,能够满足传世揲算的要求,因而也是一种可供选用的方案。例如,取$C=4$、$R=5$、$M=4$,由命题B_2可得$S=(R+2C)M+2=(5+2\times4)\times4+2=54$策。对54策做分2、挂1、揲4、归扐、4变的操作后,将揲得策数除以4,必有结果数{6,7,8,9}。显然,这种算法完全有可能是一种曾被古代占筮家们试探过的算法。他们曾将这种算法设计与命题A所表述的传世揲算做过比较和选择的可能性是很大的。

现在的分析表明,很可能是因为按命题B_2设计的这种算法

历经了4次变易，而其中的第1次变易只能出现1种扐策数，(由本书第4章中的定理4可知，此时$L = M+2 = 4+2 = 6$策)与后继的3次变易中都有两种可能的扐策数相异。这种第1次变易时，扐策数实际上不会发生变化的现象是可以通过全举法思路予以验证的。这样，第1次变易完成后，虽然进入第2次变易的参揲策数将因减少6策而变成了48策，但这是一种固定的变化，相当于直接用48策进行揲算，从而使第1次变易显得多余。这一判断也许是古代占筮家们不选命题B_2的方式进行算法设计的主要原因。

7.2.3 关于揲策数M的比较分析

1. $M=2$时，按命题B_1，取$C = 3$、$R = 6$。由于$(3-M) \leqslant K \leqslant 1$的约束条件，$K$值只有一种选法，即$K = 1$。此时参揲策数$S = (R+2C)M + K = (6+2\times3)\times2+1 = 25$策。根据本书第4章中4.3.1给出的定理3，第1次变易时，扐策数不3则5。但进入第2次变易以后，由全举法不难验证，所得扐策数都只有$L = 4$一种可能，不会形成扐策数发生变易的情形，使后继计算不能顺利完成。因此，不能将M值取为2。

2. $M=3$时，按命题B_1可以顺利地完成揲算，因而应是一种可选的方案。西汉杨雄创制的《太玄》占法便选用3作为起卦算法的揲策数。对于$C=3$，$R=6$，若取$K=1$，则参揲策数为$S = (R+2C)M+K = (6+2\times3)\times3+1 = 37$策。很难认为古代占筮家们没有对这样的算法做过试算。如果他们把这种算法与传世揲算进行了比较，很可能会因此法的计算操作偏于简单，会降低问筮者对神示效果的心理评价而不予采用。

3. $M = 6$、7或更大的数值时，情况恰与$M = 3$时的选值相反。以$M = 6$、$C = 3$、$R = 6$、$K = 1$为例，由命题B_1，可得$S = (R$

$+2C)M+K=(6+2\times3)\times6+1=73$ 策。这个策数似乎偏多，从而使得操作过程复杂化，操作性会变差。显然，M 值过大时，各次变易中反复揲取的策数过多，容易发生差错，演示效果也不好，而且过大的 S 值会使依靠双手完成的操作遇到困难。这样，可以判定 $M=6$、7 或更大的数值是不合适的，古代占筮家们应当不会选用这样的算法设计方案。

4. 较好的取法应当是 $M=4$ 或 $M=5$。估计古代占筮家们也对这两种 M 值做过试算比较，其结果是选用了 $M=4$。现在的对比分析的判断依据主要是谁的神示效果更好，估计古代占筮家们也是出于类似的考虑进行比选的。下面用具体的计算来帮助我们做出判断。当 $C=3$、$R=6$、$K=1$ 时：

若取 $M=4$、则 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times4+1=49$ 策；

若取 $M=5$、则 $S=(R+2C)M+K=(6+2\times3)\times5+1=61$ 策。

根据本书第 4 章 4.3.1 中给出的定理 3，$M=4$ 时，第 1 次变易时扐策数 L 不 5 则 9，第 2、3 两次变易时，L 不 4 则 8；$M=5$ 时，第 1 次变易时 L 不 6 则 11，第 2、3 两次变易时 L 不 5 则 10。这两种算法的参揲策数变化情形可表示为下述的枝形关系：

$M=4$：

	32{	24	$24\div4=6$
49{ 40{		28	$28\div4=7$
	36{		
44{		32	$32\div4=8$
	40{	36	$36\div4=9$
⋮	⋮	⋮	⋮
1 变	2 变	3 变，$(C=3)$	结果数，$(R=6)$

$M=5$:

$$
\begin{array}{lllll}
 & & 40\{ & 30 & 30\div 5=6\\
 & 50\{ & & 35 & 35\div 5=7\\
61\{ & & 45\{ & & \\
 & 55\{ & & 40 & 40\div 5=8\\
 & & 50\{ & 45 & 45\div 5=9\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & 1\text{变} & 2\text{变} & 3\text{变},(C=3) & \text{结果数},(R=6)
\end{array}
$$

相比之下,$M=5$ 时,所用揲算策数 S 略显偏多,而且计算过程中数字变化相对平淡,其操作性和演示效果似乎都稍差于 $M=4$ 的算法。很可是由于这方面的原因,使得古代筮家们选择了 $M=4$ 的算法方案。

这种只有通过细心比较才能发现的差异如果的确是古代占筮家们放弃 M=5 的算法方案的主要原因的话,将使我们意识到揲算的定型应当是在长期使用中不断改进才完成的,是试算对比后优选出的结果。

7.2.4 关于总策数 S 的比较分析

S 值偏大时不便操作,过小时又因涉数过简而神示性不足,用于占筮均不理想,所以 S 的取值必须合度。所谓合度,必然与所用筹策的数量和尺寸有关。从 1971 年陕西千阳汉墓出土的骨制算筹的尺寸来看,长度为 13.5cm 左右,而直径 0.3cm 左右。[4]《汉书·律历志第一上》说:"数者,一、十、百、千、万也,所以算数事物……其算法用竹,径一分长六寸,二百七十一枚而成六觚,为一握。"估计商周时期所用筹策的尺寸应与此相去不远,考虑到将策扐于指间的策数不可能太多,按上述尺寸,大约可扐十余策,因而用于揲算的策数 S 应在 40 ~ 60 策的范围内比较合适。1993 年,荆州王家台秦墓出土一批竹简,其中有一种

为《归藏》的文本,同时出有60枚装在竹筒内的算筹。[5]据《周礼·大卜》记载,“大卜掌三《易》之法,一曰《连山》,二曰《归藏》,三曰《周易》。其经卦皆八,其别皆六十有四。”是说周代使用的《易》占都有相同的卦象,估计也使用相同的起卦算法。因此,与《归藏》竹简同出的算筹还用于揲算也是有可能的,而且这批算筹共有60根,能够满足揲算用策的数量要求。

传世揲算选用50策,实际只用49策的做法,主要是算法规则所遵循的数学规律使然,是从神示性和操作性诸方面对多种算法进行了试算或实用比较之后做出的选择。注意到《易传·系辞上》记载揲算时,有“天地之数五十有五”和“大衍之数五十”两种说法,然后才指明“其用四十有九”。似乎49策这个数是衍生于55或50这两个具有神意的数的。如果真是这样,当时直接取55或50做总策数 S 岂不更好。事实上,在易学研究中,如何才能将55和50这两个数与49协调起来,从来都是一个非常费解,因而众说纷纭的难题(参看本书第3章3.1.1)。

根据命题 B_1,对应于 $C=3$、$M=5$、$R=5$、K 的取值范围为 -2、-1、0或1时,S 可取为53、54、55或56策,其中就有天地之数55在内。或者说,古人出于对55这个数的神秘崇拜,而用55策做试算的话,要找出相应的算法是不困难的。只不过用这种算法得到的结果数组是$\{5,6,7,8\}$。

类似地,按命题 B_1,对应于 $C=3$、$M=5$、$R=4$、K 的取值范围为 -2、-1、0或1时,S 可取为48、49、50或51策,其中就有大衍之数50在内,只不过用此法算得的结果数组是$\{4,5,6,7\}$。可以认为,如果存在对50这个数的神秘崇拜,古代占筮家们必定找得到这种算法。

古代占筮家们放弃这两种算法的原因会是怎样的呢?将命题A的算法与它们相比较,不难发现这两种算法的共同缺点有

三：一是结果数组的数字构成不如{6,7,8,9}的神示性强；二是 $M=5$ 时，揲算过程中的数字变化略显平淡，因而演示效果略差；三是这两种算法方案均为既可以挂1，也可以不挂1。由本书第4章中定理5和定理9便可证实这样两种状态是可以并存的。而古代占筮家则可以通过试算和全举验证发现这种不具备算法惟一性的缺点。尽管如此，仍然可以肯定地说，与神圣的"天地之数"或"大衍之数"相比，这些缺点都太微不足道了，古代占筮家们不会因此就放弃55或50两数的选择。那么，是什么原因使得他们要用49而不用55或50呢？也许，比较合理的解释是揲算定型为用49策时还没有产生天地之数或大衍之数的概念，更没有形成对这两个数的神秘崇拜。商周时期，能够算出1~10这十个自然数的和等于55，或者算出 $5\times10=50$ 等等（参看本书8.1.1）都是没有问题的，但周人并没有将 S 的取值与55或50联系起来，似乎表明这种联系是揲算定型以后的事情。很可能是春秋战国时期的易学家们为了给49的来源做出解释，便将后来流行的对55或50的神秘崇拜引入易学，并载入《易传·系辞》。55和50这两个数与传世揲算选用49作为参揲策数，本来并没有任何数学上的联系，只是由于得到的途径比较奇特，并且在数值上接近49，而古代占筮家们又不可能具备足够的数学知识去解释揲算中的道理，结果，这些数都成了神秘性极浓的易数。

7.2.5 关于 K 值的比较分析

按命题 B_1，$S=(R+2C)M+K$，当 $C=3$、$R=6$、$M=4$ 时，K 的取值范围将由于 $(3-M)\leqslant K\leqslant 1$ 的约束条件而有 -1、0、1三种。这样，$S=(6+2\times3)\times4+K=48+K$，于是就有 $48-1=47$、$48+0=48$ 和 $48+1=49$ 策三种 S 值可供选用。传世

揲算中选用的是 49 策。现在要问:与 47 和 48 两数相比较,49 有什么优点呢?

命题 B_1 就是本书第 4 章中的定理 5,讨论的是有挂 1 条件下的揲算。而在第 4 章中的定理 9,则给出了无挂 1 条件下的揲算规律。这两条定理的不同,在于 K 的取值范围有异。在不挂 1 的条件下,K 应满足 $(2-M)\leqslant K\leqslant 0$ 的约束条件。当 $M=4$ 时,K 可取 -2、-1、0 三种数值,对应于 $C=3$ 和 $R=6$,$S=(R+2C)M+K=(6+2\times 3)\times 4+K=48+K$,就有 $48-2=46$、$48-1=47$ 和 $48+0=48$ 策三种 S 值可供选用。

而在有挂 1 的情况下,S 的取值可在 47、48、49 三数中选择。显然,47 策和 48 策同时适用于定理 5 和定理 9,表明这两种参揲策数既可挂 1,也可不挂 1,不具备算法的惟一性。若选 49 策,必须挂 1 才能使用,正是这一策数在数学上具有的一种重要的优点。如果古代占筮家们在算法设计上真是考虑到了这么仔细的程度,才选定出 49 策的话,那的确是一件令人惊叹的事情。由于这几种策数的试算和全举分析都能够做到,至少不会有特别的困难,因而古人不必考虑什么 K 值,就可以对是否挂 1 的要求做出直观的判断,所以笔者推测古代占筮家们应该是曾经对此做过比较选择的。注意到有挂 1 时会大大提高揲算的神示效果,古代占筮家们选用 49 策就是很自然的事情了。

7.2.6 关于分二和挂一的思考

在揲算中,“分二”是一个很关键的步骤,正是由于分 2 时的随机性,才有结果数的变化,揲算才能获得灵气和魅力。《易传·系辞》说“阴阳不测之谓神”,指的就是这种随机性。如果不是分 2,而是分 3,揲后余策的组合情形会变得过于复杂,要想从中总结出规律并程序化为一种算法将不是一件容易的事情。

而且即使找得出一定的规律,也不见得能适用于占筮。估计古代占筮算法中不曾有过分3的做法,所以本书不考虑分3的情况。当然也不考虑2以外的其他分法。

与“分二”相比较,“挂一”是一种锦上添花的设计。可能早期的揲算并没有挂1的安排,因为从数学上看,揲算基本模式的建立与有无挂1并无必然的联系,或者说不挂1的揲算照样能达到起卦目的。例如 $S=46$ 策且不挂1时,分2揲4,3变后所得结果数也是{6,7,8,9},而且由于此时必须不挂1,所以也具有算法上的惟一性,同样具有良好的数学特性。估计在早期的揲算中并没有挂1环节的设置,也许是因为后来占筮家们发现加入挂1环节后会收到意想不到的神示效果,便成了惯例沿用至今。正是挂1的出现,使后人归纳一般性的揲算命题时遇到了很大的麻烦。但是有挂1的揲算比无挂1的揲算要神奇得多,则是不可否认的事实。如果进一步考虑挂2,甚至挂3的算法,理论上当无不可,但似有画蛇添足之嫌,估计古代占筮家们并不采用这类做法,所以在本书的比较分析中,也不对不同的挂法进行讨论。

7.3 《周易》揲算的发明决非偶然

上述比较分析表明,传世揲算是所有类似算法中最能满足占筮要求的一种,是西周占筮家们在长期的占筮活动中,通过大量的实算比较选定的最佳算法,这也是揲算自定型以后具有相当好的稳定性的主要原因。应当指出,命题B的提出与解读,属于现代数学中初等数论的范畴,涉及的数学知识有许多都是西周时期不可能具备的。命题B只在命题的来源上与《周易》揲算有关。在这个意义上,可以说如何解读一般性揲算命题,是古人留给我们的一则初等数论课题。命题B证明了一般性揲

算命题的存在性,不过仍可能还有别的解读形式。虽然一般性揲算命题的表述形式也许并不惟一,但可以肯定,不论哪种表述形式,都是古代占筮家们无法找到的,可见他们根本不可能采用先建立一般性命题,再选出命题 A 的办法来定出揲算,他们只能循着实算摸索和经验归纳的途径完成揲算的发明和定型。西周占筮家居然从若干可供选用的算法中找出了最好的一种,实在是很不容易的。

注意到西周王室对卜筮的管理较为严格,同时占筮家们对筮法的研究和改进也会在相对封闭的环境中完成,因而具体的改进定型过程必然鲜为人知,且几乎没有向后人做如实传达的条件。这种状况事实上有利于将筮法规则的来源做神化处理,从而起到强化占筮影响的作用。显然,这对王权的巩固和占筮家地位的维护都有好处,因而上述的推测应当是一种最有可能出现的状态。到了春秋时期,周室已无力落实严格的管理,但流传到各地的《周易》占法却早已定型。在浓厚的神秘文化气氛中,人们对这种神奇的占法源于古圣人之手的说法应当是认可的。当然,他们也没有条件去追寻包括揲算在内的《周易》占法的具体的发明过程。由于我们已经没有办法得知古人发明揲算时的具体情况,因而通过对揲算一般性命题的探讨,得出可供考古研究参考的推测结论,不妨视为讨论揲算发明概况这一课题的一种途径。

利用命题 B,可构造出多种可供选用的揲算方案,在对这些方案进行系统的比较分析之后,可以帮助我们对揲算的形成过程做出合理的推测。首先,古人曾经使用过的算法可能有多种,以揲扐为特征的算法只是其中的一种类型。但揲算模式一经出现,在算法形式上就显得与众不同,而被古代占筮家们所重视。其次,从揲算模式的出现到最后定型,必然涉及多种同类算法的

比较和选择。早期的揲算应该相对简单或粗糙，占筮家们也许对算法内部的逻辑结构和结果数出现频率等方面的意识还极为肤浅或淡薄，但经过不同算法间的反复对比，以及长期占筮经验的积累，他们逐渐产生了相应的考虑，促成了算法设计的改进。古代占筮家们可以在无须掌握系统的数学规律的条件下，以蓍草筹策为算具，事实上按全举证法的原则，即依序列出各种具体算法在各自的筮算过程中所有可能出现的情况，检查判断这些算法的数学可行性。古代占筮家们极有可能使用过无挂1的方案，后来又发展出有挂1的方案。此外，$C = 1 \sim 5$、$R = 1 \sim 6$、$M = 3 \sim 5$、$S = 40 \sim 60$、$K = (3 - M) \sim 2$等范围内的多种可选算法极有可能曾被他们摸索过，或做过试算，或用于实占，才积累了足够的经验，设计出最佳的算法。揲算的定型应当经历了一段并不算短的过程，集聚了西周占筮家们的数学智慧，从一个侧面显示了西周数学的发展状况。揲算的发明有其历史的必然和成功的条件，是西周占筮家们充分应用已有数学知识并有所发展的成果。揲算的发明不是"偶然的凑巧"。

注释：

[1]郭沫若：《周易时代的社会生活》，载蔡尚思主编《十家论易》，上海人民出版社2006年6月版，第6页。

[2]吴文俊主编：《中国数学史大系第一卷》，北京师范大学出版社1998年9月版，185~188页。

[3]汪宁生：《八卦起源》，《考古》1976(4)，第242页。

[4]宝鸡市博物馆、千阳县文化馆、中国科学院自然科学史研究所：《千阳县西汉墓中出土算筹》，《考古》1976(2)，第85页。

[5]荆州地区博物馆：《江陵王家台十五号秦墓》，《文物》，1995(1)。

第8章　《周易》揲算是西周数学的一项成果

《周易》揲算是西周占筮家们在算法设计上的一项成果，是西周数学中惟一可做完整描述的算法例证。揲算有三条值得注意的数学特点：程序化的实用算法设计思想，以经验归纳为主的数学方法，以及使用筹策算具的计算方式。从中不难发现揲算对中国传统数学的形成有着一定的影响，应当是中国古代数学史研究中不可忽视的内容。

8.1　西周数学概况

由于史料的缺乏，在中国古代数学史的研究中，关于西周数学的具体情况至今了解甚少，因而直接讨论西周数学尚有一定困难。在现有条件下，目前常见的研究途径主要有两条：一是根据出土的西周及西周以前的文物中与数学有关的材料，推论西周时期的数学发展状况；二是从后世文物和算书文献中的相关资料反溯西周数学。毋庸讳言，在确凿的考古证据发现之前，这样的研究结论大都属于推论或猜测，人们所能做的只不过是找寻尽量充分的依据和进行合乎情理的推证。

8.1.1　商周出土文物中的数学资料

李俨先生在《中国古代数学史料》一书中介绍了数十例殷

墟出土的甲骨上契刻的数字，书中说：

今知除一、二、三、四、五、六、七、八、九、诸单位数外，还包含有十一、十二、十三、十四、十五、二十、二十五、三十、三十三、三十七、四十、四十一、五十、五十六、六十等数，百以上的数字如：

一百《殷墟文字乙编》3024："方登人百。"

二百《殷墟摭遗续编》62："二百人王。"

三百《殷墟书契前编》3,31,2："左右中人三百。"

四百《殷墟卜辞》1517："四百。"

……

一千《殷契佚存》324："丁未卜……王登千人。"

……

八千《殷契粹编》119："□人八千在驭。"

一万《库方藏甲骨卜辞》310："登妇好三千，登旅万。"

三万《殷契粹编》1171："癸卯卜……其□三万。"

甲骨文的数字记载，三万是最高的记录，又甲骨文三位以上复位数的记载，如：

《殷墟文字乙编》2908："□一百六十四，兔一百五十七。"

……

上举的甲骨文，只是数字的记录，当然这些复位数的记录也说明是通过运算得来的。

《殷墟书契前编》3,23,6：

"五十犬 五十羊 五十豕

三十犬 三十羊 三十豕

二十犬 二十羊 二十豕

十五犬 十五羊 十五豕”

这一片甲骨文内的数字都是五的倍数……。[1]

由此可以确认商代已有一至九和十、百、千、万共13种基本数符,使用10进制记数法,可以点数和记录十万以内正整数的任何数值,但一般认为还没有形成成熟的位值制记数的方法。关于数的计算,则可以推测:

1. 商人应当能够熟练地完成十万以内正整数的加法运算;

2. 只要不出现负数,十万以内正整数的减法运算也应该为商人所掌握;

3. 从一些数字记录有明显的倍数关系来看,商人应能完成日常使用的正整数乘法的计算,且不排除九九乘法口诀的存在;

4. 借助于九九乘法口诀,商人很可能会做比较简单的正整数范围内的除法。

从筮算使用筹策的做法,似乎可以估计商人的数算也是以筹策为工具完成的,不妨称之为早期筹算,以区别于以后引入了位值制的较为成熟的筹算方式。当然,对于商代的早期筹算所遵循的规则及具体的操作形态,至今尚无了解。对所谓早期筹算的相当粗糙的概念性的认识主要来源于筮算。

其他与商代数学有关的内容还有:

根据晚商甲骨文中“属于帝乙的带有王年的周祭材料”[2],商人应当是用商王在位的年数来纪年。他们将1年分成12个月,逢闰另加闰月,用10进制序数纪月,而用干支法纪日。干支排序的方法同样见于殷墟甲骨中的文字记载(图8-1),是用甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸10种称为天干的字符,与子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥12种称为地支的字符,按甲子、乙丑、丙寅、丁卯……的规则,得到的一种循环排序。由于1个轮回共有60种排法,故称为“六十甲子”。但是这60个序

《甲骨文合集》37986片
为一干支全表，每行以
“甲×”开头，以“癸×”
以结尾

《甲骨文合集》
1656片正面有
大量从一至
十的自然数。

《甲骨文合集》37471片
左下角三个符号为“八十又六”

图8－1　商代卜甲卜骨上的数字和干支表，引自邹大海《中国数学的兴起与先秦数学》

号只用于循环状态下的计数,没有逢60进位的安排,一般认为干支计数序列不是60进制。(用干支纪年则是商代以后才出现的做法)例如甲骨卜辞"癸卯卜出贞旬亡祸在七月"(郭沫若:《殷契粹编·1430》)、"壬辰卜大贞翌己亥有于兄十二月"(容庚:《殷契卜辞·31》)中的癸卯、壬辰、己亥都是日期,而七月、十二月则是月份。

不少建筑遗址和出土器物的形制纹饰则显示出人们已使用了规、矩、准绳之类的工具,因而商人应已掌握了一些相关的几何知识,但是这些知识很可能只限于实用,从中并没有发展出类似于古希腊演绎几何那样的数学成果。

这些考古材料说明商代的数学知识已广泛地被应用于天文历法和生产生活之中,满足实用的需要是其明显的特点。周人灭商以后,这些数学知识基本上都为周人所接受。在目前已知的西周时期的出土文物中,则发现周人以此为基础,在数学方面有了不少进步。但是比较令人关注的发现,似乎应当是西周文物中继殷商之后多有出现的筮数,相关情况在本书第2章2.2节中已有介绍,这里不再重复。

1998年,吴文俊先生主编出版了《中国数学史大系·第一卷》,其中的第三章由孔国平先生执笔写成。通过对西周青铜器铭文的研究,孔先生指出,在下述诸方面,周人的数学取得了明显的进步:

1、关于计数法:

> 西周数学继承了商代的十进制,记数方法趋于完善。这首先表现在大数记法上。甲骨文中虽已出现"三万"这样的大数,但是个单字,显然是大约之数。而西周金文中已有了对大数的精确记载。例如周康王时,盂曾受命征伐北方的鬼方族,获胜后做小盂鼎以作

纪念,铭曰:“伐鬼方……孚(俘)万三千八十一人。”这说明在社会生活中,人们已产生了对数学精确化的初步要求。

2. 关于计量单位:

从金文中这些单位名称(指里、田、邑、亩、两、钧等计量单位的名称)来看,周代许多器物数量已有定称,其度量衡的确比商有了明显进步。不仅如此,周人还有了明确的“方里”、“方尺”概念,如西周召圜器铭:“(周王赐召)毕土方五十里”,土地面积以平方里计,大概以此为最早之记录。

3. 关于历法:

周历与商历的最大区别是采取了一月四分法,这种分法是以月相为标准的。西周金文中共有四个月相名称——初吉,既生霸,既望,既死霸,相当于今之朔,上弦月,望,下弦月……从西周金文来看,周人仍采用60干支纪日法,但把干支附属于月相之上。如师奎父鼎铭:“隹六月,既生霸,庚寅。”是说在六月的第二个月相时段的庚寅这一日……金文中的孟、仲、季三个顺序数词常用来表示一季中的三个月。周代有明确的季节划分,这也是比商代进步的地方。

4. 关于四则运算:

整数四则运算产生于何时,尚无定论。但至今未在甲骨文中发现有关运算的记载,西周中期曶鼎铭文,是我们所知最早的记载运算的文字。铭曰:“(曶)以匡季告东宫……东宫乃曰:偿曶禾十秭,遗十秭。来岁

弗偿则倍四十秭。"这是东宫对曶与匡季经济纠纷的判决,大意是要匡季赔偿曶庄稼10秭,并反送给他10秭,共为20秭。若第二年偿还,就要增加到原来的两倍,即40秭。这实际上已包含加和乘两种运算:10 + 10 = 20,20 × 2 = 40……另外,从西周筮法分析,当时已有减法与除法运算。

5. 关于几何知识:

虽在金文中尚未发现几何知识的记载,但从青铜器及其上面花纹形状的分析,可知周人已掌握了相当丰富的几何知识。

6. 关于占筮,孔先生认为:

西周的卦与《周易》所载不同,表示卦的数字不是"六、七、八、九"而是"一、五、六、七、八"。但后来的八卦无疑是由西周卦符演变而来的。根据西周卦符特点及后世的筮法,我们提出西周筮法假说如下:

取筮草44根,任意分成两堆,若两堆筮草根数恰等,则得到卦符1。若两堆不等,则从每堆依次扣除4根,直到每堆余数不大于4为止。把两堆余数加起来,必为4或8,从44中减去4或8,得40或36,我们称为第一次差。

把40或36根筮草按上法演算一遍(不必考虑两堆是否相等),得到第二次差——36,32或28。

最后把第二次差用同样方法演算,得第三次差——32,28,24或20。用第三次差除以4,有4个可能的结果——8,7,6或5。其结果便是卦符。[3]

不过，在本书第 2 章表 2－2 中可以看到，西周筮数中数 1 的出现频率高达 114/319＝0.3574。用不着计算，一眼就能看出，用孔先生设想的算法，得到数 1 的概率却是非常低的。因而这种算法顶多也只是各种可能被古代占筮家们摸索过的算法中的一种，似乎很难认为是商周占筮中曾经使用过的主流算法。另一方面，从“西周的卦与《周易》所载不同……后来的八卦……”的提法来看，似有六十四卦不是西周事物的意思。此外，孔先生对西周筮法（应是指揲算）的分析，似乎局限于揲算中单个的计算环节。或者说，在将完整的一套算法设计进行拆解之后，根据单个的计算环节，只得出“当时已有减法与除法运算”的结论，并没有将揲算作为一种算法设计的成果来看待。这种情形可能与缺乏对揲算进行深入全面研究的背景有关。

8.1.2　古代文献中与西周数学有关的资料

在已知的先秦传世文献和考古材料中，尚未发现专门的数学著作。汉代算书中可供追溯先秦数学的著作以传世的《九章算术》、《周髀算经》，以及 1983 年江陵张家山汉墓出土的竹简《算数书》[4]等最为重要。但是在这些古书中几乎不能分离出可考定为西周数学成果的具体内容，学者们只能笼统地推测有的命题及相关算法可能源自于西周。例如邹大海先生在《中国数学的兴起与先秦数学》一书中就推测：“西周时代的数学内容，有郑众所列九数项目中方田、粟米、差分、商功、均输、旁要的部分方法。”[5]当然，由于举不出具体的例证，这些方法的使用形态仍有待考证，从而有损这种推测的说服力。迄今为止，在其他古代文献中找到的涉及西周数学的材料零星而稀少，只有《周易》中的卦象、《易传》中的揲算、《周礼》中的九数等为数不多的记载。

钱宝琮先生主编的《中国数学史》认为:

> 周人灭殷后,数作为六艺之一,开始形成一个学科。用算筹来记数和四则运算很可能在西周时期已经开始了……“句三、股四、弦五”,这个特殊例子的发现,可能是很早的。[6]

其中关于“数”开始形成一个学科的依据,应是《周礼·保氏》的记载:“保氏掌谏王恶,而养国子以道,乃教之六艺:一曰五礼,二曰六乐,三曰五射,四曰五驭,五曰六书,六曰九数。”其中的“九数”指九种类型的实用算法,是王室和贵族子弟必须学习的六种技艺知识之一。东汉大司农郑众注释“九数”为:“方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要。”(注:《九章算术》所列与之基本相同,只是差分做衰分,旁要做勾股)钱先生没有对他的推测做具体讨论,也没有提及《周易》卦象和揲算,显示出他对西周数学的评介是很谨慎的。

吴文俊先生主编的《中国数学史大系·第一卷》的第四章由罗见今先生执笔写成,在“《周易》中的数学思想”一节中,罗先生讨论了下述内容:

1. 关于河图洛书:

> 《周易·系辞传》称:“是故天生神物,圣人则之;天地变化,圣人效之;天垂象,见吉凶,圣人象之;河出图,洛出书,圣人则之。”这是经书中关于河图洛书的最早记载,河洛并提,暗示两者同属天生神物,其兆象可以预示天地变化和吉凶利害,成为圣人治世的准则。但《周易》中并未解释什么是河图洛书,于是后世学者纷纷著书立说,形成延续2000多年的河洛之学,在中国文化史上为一大专题……河图洛书可能与纵横图有

关系,但有何种关系目前尚不清楚。

纵横图即中国传世的一种三阶幻方,也叫九宫图(图 8－2),在这个图中,纵向、横向以及对角线上的 3 个数之和都等于 15。图 8－2 中还列出了一部分古人赋予纵横图的文化含义。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

巽 立夏 东南	离 夏至 南	坤 立秋 西南
震 春分 东	中	兑 秋分 西
艮 立春 东北	坎 冬至 北	乾 立冬 西北

图 8－2 中国古代的一种三阶幻方及其部分文化含义

1977 年 7 月,安徽阜阳西汉汝阴侯墓出土一件太乙九宫占盘,断为汉文帝七年(公元前 173 年)之物。其天盘上按纵横图的顺序标识出 1～9 共 9 个数字,是中国目前所见最早的三阶幻方实物。附带说明,图 8－3 中未摹写出应居于中部的数字 5,但在相关文献中则有"在'一君'与'八'间近中心位置针刻一'五'字"[7]的介绍。

由此可知,在西汉早期,纵横图已被用于占式之类的占问术。在将地理方位、季节变化等因素做出综合考虑之后,纵横图也被用做修建房屋及医治疾病的依据。例如《大戴礼记 · 明堂》有"明堂者,古有之也。凡九室……二九四七五三六一八"的记载。又如《黄帝内经 · 灵枢》将"九宫八风"用于医学等等。但是从这些资料中均看不出河图洛书与纵横图有什么联系。

在朱熹所撰的《周易本义》一书中,画有用黑白点数构成的河图洛书的图像(图 8－4)和说明,兹转录如下:

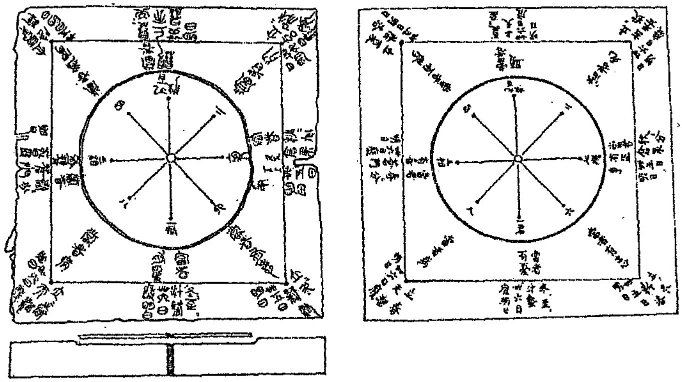


图 8－3　汝阴侯墓出土占盘的摹本(左)及示意图(右),引自《考古》1978(5),第 341 页

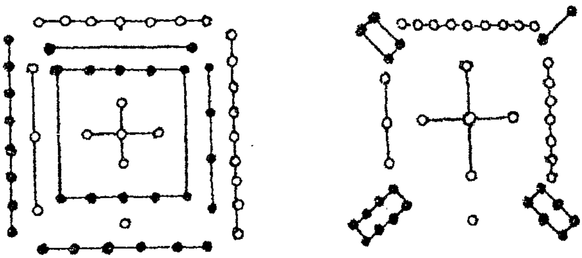


图 8－4　河图洛书

右《系辞传》曰:“河出图,洛出书,圣人则之。”又曰:“天一、地二、天三、地四、天五、地六、天七、地八、天九、地十。天数五,地数五,五位相得而各有合。天数二十有五,地数三十。凡天地之数五十有五,此所以成变化而行鬼神也。”此河图之数也。洛书盖取龟象,故其数戴九履一,左三右七,二四为肩,六八为足。

蔡元定曰:图书之象,自汉孔安国、刘歆、魏关朗子

明，又有宋康节先生，邵雍尧夫，皆谓如此。至刘牧始两易其名，而诸家因之，故今复之，悉从其旧。

由此可知，将这两种由黑白点数构成的图像联系于河图洛书并纳入易学范畴的做法，至少可推溯至汉代，而在宋代及以后的易学中已是成例。但是罗先生并没有考证纵横图的发明时期，因而不能确定它是否属于西周时期的数学成果。

2. 关于“八卦数学”：

从数学上讲，从两类符号集合中任取两个的有重复排列只有 4 种：$2^2=4$，如此而已。同理，任取三个的有重复排列只有 8 种：$2^3=8$，这就是八卦了……组合数学十分重视数字配置的均衡性，在一定约束条件下达到这种均衡往往需要较高的技巧。八卦图同洛书数一样，巧妙的配置方法令人赞叹……将八卦看做八类元素集合，任取两元从下到上排列起来，便得到六十四卦——即所谓“重卦”：$8^2=64$。虽然从阴阳两爻的两类中任取六元的有重复排列 $2^6=64$ 也可以得到完全相同的结果，但按重卦的原意不应做后一解释。《说卦》称“八卦相错”，错即重叠，即“重卦”的由来。

3. 关于卦象与二进制：

（莱布尼茨）认为，二进制顺序在远古时代的《易经》中已被应用，这位微积分的奠基人相信古代中国人在发明二进制计算方面有优先权。这一看法广为传播，产生了很大影响。我国数学史界不少学者对此持保留意见。卦爻可用二进制解释与它本身具有二进制含义不同。国外也有人认为六爻不具有数字意义，这

是不了解九六说的缘故。当然,九六说亦不能证明卦爻本身有二进制含义。我们的着眼点在于,作为二元哲学的一种模式和数学符号的一种体系,八卦数理本身的抽象性带来了与之相应的普适性……我们对将八卦数理与现代科学某些成就直接联系起来的方法持慎重态度。在《周易》或有关史料中还没有发现支持这些观点的材料,何况方法本身也是有争议的。

4. 罗先生还讨论了"《周易》中吉凶休咎出现的频率,即概率问题"。所论涉及两个方面:

依据《尚书·洪范》中"稽疑"一节的下述内容:

汝则有大疑,谋及乃心,谋及卿士,谋及庶人,谋及卜筮。汝则从,龟从,筮从,卿士从,庶民从,是之谓大同,身其康强,子孙其逢吉。汝则从,龟从,筮从,卿士逆,庶民逆,吉。卿士从,龟从,筮从,汝则逆,庶民逆,吉。庶民从,龟从,筮从,汝则逆,卿士逆,吉。汝则从,龟从,筮逆,卿士逆,作内吉,作外凶。龟、筮共违于人,用静吉,用作凶。

在对君、臣、民、卜、筮五个方面的吉凶判断进行分类后,罗先生认为:

用模糊数学的方法算出"五方"之值的取值范围,可用作参考……这样看来,古代君主采取了明智的决疑政策,这是早期概率统计思想一个古老的例证……但它还不是自觉的概率论思想,这是需要说明的。

罗先生还指出:

《易经》是最古的占筮用书,它的关于吉凶休咎成

败得失的记录，从客观上反映了现实生活中各种随机事件出现的概率。刘蔚华做过一个统计："我粗略地把《易经》中卦爻辞的吉凶断语，分为大吉、一般的吉、利、无咎无悔、悔吝不利、凶、厉等七类，对其出现的次数和所占比重做了一个统计。"……总的说来，吉祥类的比重较大，占 5/7，非吉祥类占 2/7，好事比坏事多……从一个侧面反映了当时社会安定与动乱的客观情况。

5. 根据《易传 · 系辞上》"大衍之数"章的记载，"引用朱(熹)说，参考今人的研究，对《周易》揲法做一数学上的解释并给出证明"，是罗先生重点研究的内容。由于本书第 3 章 3.2.2 节已对罗先生提出的"分揲定理"有详细介绍，故不再重复引述。但于数学解释之外，罗先生并没有对《周易》揲算的数学思想进行归纳总结或分析讨论。这种情况的出现，可能与罗先生的相关论证尚不完备有关。关于揲算，罗先生的结论是：

> 虽然《周易》不会有分揲定理的表述形式，但古人在漫长的年代里积累了经验，能够应用这一数学规律，将程序和结果记录下来，却是考之有据的。它包含着深邃的数学道理，反映了古人智慧的光辉。[8]

看来，罗先生似乎是有将揲算视为一种程序化算法设计的意思，因而揲算应当是古代数学中很有特色的一项应用实例，但能否将揲算界定为西周数学在算法设计上的一项成果，则没有做出明确的论断。这样，在罗先生的论述中，似乎只有"八卦数学"中反映组合数学思想的卦象构成部分，可被视为是西周数学的成果。

作为"第一部明确以秦统一中国以前的数学发展为研究对

象并有重大进展的数学史专著”,[9]邹大海先生的《中国数学的兴起与先秦数学》一书对先秦数学做了较全面的研究。书中关于西周数学的内容主要强调“十进位值制记数法的形成”和“数学成为一门学科”,但因史料缺乏,具体的例证仍然很少。邹先生认为:

> 由远古用竹棍、草秆等记数,周人以蓍草占卜和《周易》的经文成于西周初年,至迟不晚于西周中叶看,商周时代有产生算筹记数法的条件和背景……推测算筹记数法可能成于商周之际……纵横相间,在表示6~9的数码中以其中一根算筹代表所含的5这样的定制,可能到西周春秋之交才形成。

从邹先生的具体推考可知,郑众“九数”诸项中,除旁要的勾股特例可以上溯至西周或晚商外,其他都只溯及于春秋战国时期,只能估计其中部分知识源于西周。虽然邹先生推测“西周时代的数学内容,有郑众所列九数项目中方田、粟米、差分、商功、均输、旁要的部分方法”,但是同时他也指出,“西周的九数具体是哪九个门类,已经不可考了”。

在邹先生所著的这部书中可以归结出的西周数学成果大致有以下几项:

1. “《周髀算经》所说应反映出西周时已有九九。”

2. “商高可以定在西周初年”,因而勾股特例的发现不会晚于周初。

3. 形成于西周或更早的八卦和六十四卦体现了“组合数学思想”。

其中前两项的依据主要是《周髀算经》中周公与商高的问答:

> 昔者周公问于商高曰:“窃闻乎大夫善数也,请问古者包牺(伏羲)立周天历度。夫天不可阶而升,地不可尺寸而度,请问数从出?”商高曰:“数之法出于圆方。圆出于方,方出于矩,矩出于九九八十一。故折矩以为句(勾)广三,股修四,径隅五。既方其外,半之一矩。环而共盘,得成三、四、五。两矩共长二十有五,是谓积矩。故禹之所以治天下者,此数之所生也。”周公曰:“大哉言数!”

邹先生推考的结果是:“九九早在殷末已有,这种可能性也是有的。”同样地,勾股特例也可能发现于殷商。这样,九九口诀和勾股特例很可能都属于商人(商高)传给周人(周公)的数学知识,其起源当早于西周。

关于一般性的勾股定理,根据《周髀算经》中相关的记载,邹先生推考的结果是直到春秋时期才被陈子提出,因而不能断为西周时期的数学成果。

关于卦象的形成时期,邹先生未做考证。按《史记·日者列传》的说法,伏羲创制八卦,文王演为六十四卦。如果认为八卦的起源早于西周,而六十四卦则可以划为周文化的范畴。

至于《易传》中记载的揲算,邹先生将其视为一种“操作法”,划归为春秋战国时期“一个四则运算的例子”,不是西周时期的事物。

此外,关于河图洛书与九宫图的关系,邹先生认为:

> 钱宝琮先生批评宋代易学家把九宫图称为河图或洛书,认为这是“穿凿附会,不值得一驳”。这是受了当时疑古之风的影响。现在多数学者认为两者是有联系的……中国远古时代形成数字与方位乃至季节等的

对应关系，在这种数字崇拜的神秘主义背景下，最终形成了具有特殊文化含义的九宫图，并不断调整或赋予它新的含义。这样说，也许离事实不远。

在论及九宫图的出现时期时，邹先生考证的结论是："拟为战国晚期应该问题不大。"[10]

总而言之，根据邹先生的研究，若将九九乘法口诀和勾三股四弦五的勾股特例视为商文化的内容，则古代文献中记载的西周数学可考的实用例证就只有六十四卦一种了。

8.2 《周易》揲扐算法是西周数学的一项成果

8.2.1 关于揲算定型时期的再讨论

本书第6章6.1节从概率统计的途径做出了揲算定型的时期应不迟于西周晚期的推测，这是下限。由于文献资料和出土材料都比较缺乏，目前还难于较准确地考定揲算定型时期的上限。综合相关的间接的信息，笔者倾向于认为揲算定型时期的上限不会早于西周中叶的末期。因而传世揲算可推定为西周事物，是西周占筮家们在程序化算法设计上的一项成果，也是目前所知道的西周数学中惟一可做完整描述的算法实例。

本书第2章2.2节对六十四卦卦象的形成过程做了一些推测，相关的讨论似乎说明卦象形成的时期应不迟于西周晚期。由于只要是能得出奇偶两数的筮算方法都可以顺利地转化为阴阳爻符而形成卦象系统，因而不能认为卦象一定是在揲算定型以后才形成的。但从卦象很可能是由筮数演化而成的情况来看，卦象形成于揲算定型之后的可能性也是存在的。显然，在找到确凿证据之前，关于揲算和卦象谁先定型或形成的问题，还难以做出具体的结论。有鉴于此，本书将卦象的形成时期与揲算

的定型时期做了分开讨论的处理，从结果来看，其下限都不迟于西周晚期。

关于《易》占揲算定型时期的上限，除本书第 7 章 7.2.2 节的讨论之外，笔者还有以下思考：

在商武丁至帝辛时期的甲骨文中，有若干例“巫”字，《尚书·君奭》说：“在太戊时，则有……巫咸乂王家”，可知巫咸是商王太戊的辅臣，《吕氏春秋·审分览·勿躬》说：“巫咸作筮”，东汉许慎《说文解字》也有“古者巫咸初作巫”之说，一般认为商代确有称为巫的人做占筮的事。注意到揲算中用到的数字计算并不复杂，顶多与 50 以内正整数的四则运算有关，甚至还可以简化到只用加减法，但并不能因为商代已具备这样的计算能力，而且又有像巫咸这样的占筮家，就把揲算定型的时期上溯于商代。因为揲算的特点不在数算的复杂程度，而在算法模式的建立和操作程序的设计。前面的比较分析表明，传世揲算在算法设计上已有一定的难度，需要熟练的数算能力和严密有序的逻辑判断能力，以及敏锐的经验归纳能力，然而在商代似乎还达不到这样高的算法设计水平。揲算从模式的出现到完善定型，应经历了一段不能算短的过程，估计商代使用的占筮算法中已有揲算模式出现，但属比较简单的状态，或者是所用算法尚有缺点的过渡状态，远未发展到利用全举法对算法设计进行核验和改进定型的程度。

在商周时期的甲骨文、金文、陶文中发现了不少筮数，学者们认为这些筮数是当时的占筮记录，这些数字的获得则与当时所用的占筮算法有关。本书第 2 章表 2－1 的统计情况表明，筮数主要出现于商代晚期至西周中期。如果这些筮数在构成上与传世揲算的结果数相符，便有理由推测揲算定型于相应的历史时期。但从表 2－2 的统计，以及通过对同版筮数或同批筮数的

构成所做的分析,发现:筮数中的数字以1、5、6、7、8为多,9很少(共4例),而2、3、4三数则完全未见。而且同版甲骨或同批筮数在数字构成上与揲算结果数只有6、7、8、9四种几无相符的例子。这些情况说明迄今所发现的筮数不一定都与《周易》占法有关。李零先生在《跳出周易看周易》一文中就指出:"把所有'数字卦'都归入《周易》的范畴是不大合适的,整个思路还有待拓广。"[11]不妨推测,这些筮数可能与相应发展阶段的,已经失传了的那些算法有关,其中一些算法即使采用了揲算模式,也还没有发展到定型的程度。

根据这些材料,笔者估计揲算模式萌生的时期可能比较早,也许在商代以前就在原始的占筮中使用了揲算模式下最为简单的一些算法。到了晚商和西周早中时期,曾出现过多种不同的筮算方法,可以认为在这些方法中就有渐趋复杂的揲算模式下的不同算法。经过古代占筮家们的不断改进和选择,揲算模式下的算法受到了特别的关注而成为主流算法,很可能在西周晚期以前完成了形如传世揲算的定型设计。结合出土筮数的数字构成特点,可以推测揲算定型时期的上限大体上是在西周中叶的末期,很难想象会有更早的可能。因此,认为传世的《易》占揲算是发明于西周时期的一种计算方法,应该没有问题。

8.2.2 揲算是一项数学成果

说《易》占揲算与数学相关,大概没有人会提出反对的意见,但要说揲算是一项西周时期的数学成果(还没有说它是西周数学的标志性成就)就不见得了。例如在朱伯崑先生主编的《周易知识通览》一书中,李申先生在他所写的"易学与数学"一节中是这样评价揲算的:

> 《易传》不研究有关实际问题的运算,它所说的,

是纯粹的数与数关系。包括 10 以内奇数、偶数之和，以及 10 以内自然数总和;50 以下某些数除以 4 的余数，倍数，以及某几个数与 9、6 的乘积等等。这些知识在当时，还不是一般人都很容易做出的答案。不过数学在当时已有了高度发展。当时的数学，已能乘方、开方，能算勾股、面积及各种比例问题，还能完成许多方圆问题的计算。所以《易传》中的数学知识在数学发展史上已没有意义，现代一般的数学史著作不提及。[12]

又如邹大海先生在《中国数学的兴起与先秦数学》一书中认为，揲算是一种“操作法”，是出现于春秋战国时期的“一个四则运算的例子”。在引述了《易传·系辞上》“大衍之数”章关于揲算的文字之后(本书第 3 章 3.1.1 中也有这段引文，故未重复引出)，邹先生说：

> 此段文字包含以下运算：天数总和为 $1+3+5+7+9=25$，地数总和 $2+4+6+8+10=30$，天地之数为 $25+30=55$。把 49 根蓍草信手分为两部分，从这两部分中取一部分拿去 1 根，将这时的两部分，各自 4 根 4 根地取走，最后都余下不超过 4 根，其时所余的蓍草数有四组结果：(4,4)，(1,3)，(2,2)，(3,1)，这实际上是 $(48-m)\div 4$ 和 $m\div 4$ 的余数。3 变得 1 爻，1 卦 6 爻，1 卦的变数为 $3\times 6=18$。阳爻用九由“揲四”而成，故用策 $9\times 4=36$；阴爻用六亦由“揲四”而成，故用策 $6\times 4=24$。乾之策为 $36\times 6=216$，坤之策为 $24\times 6=144$；乾坤之策为 $216+144=360$。易六十四卦，阳爻，阴爻之数各 192，二篇之策为 $192\times 36+192\times 24=$

> 6912 +4608 =11520。系辞所记的操作法，当远在系辞撰写的年代以前，最先可能是用多次相减的方法确定余数的，到了系辞时代就可以直接用乘法来计算抽出的蓍草数得到余下的蓍草数了。[13]

显然，李、邹二先生的论述至少存在以下两方面的问题：

1. 对揲算进行了人为的拆解。揲算是一套完整的程序化算法，这套算法由一系列的数算环节构成。单看某一个具体的数算环节，的确是再简单不过了。例如揲 4 环节，无非是对一堆筹策做减法，这对早于商代的古人或者初学数算的儿童，都不是一件困难的事情。不过我们关注的不仅仅是各个数算环节，更要看到将这些数算环节联系起来的严密的数学承续关系和内在的逻辑结构，应当明确揲算是一种程序化的算法设计。将这种有着明确用途的成套算法拆解为一堆简单的数算，肯定是不妥当的。作为一种数学思想，算法设计从来是数学史研究中颇受重视的内容，而《易》占揲算本是研究西周时期算法设计数学思想时难得一见的保存得相当完整的原生例证。这样珍贵的材料竟被草率地拆解而不值一提，可能与长期以来未能破解揲算的一般性命题，因而无法对揲算展开全面深入研究的情况有关。

2. 没有对揲算形成的时期进行必要的推测考证。由于开方术见于《九章算术·少广》，尚不能考定出于西周，一般认为是春秋战国时期的数学成果，所以李先生在上述引文中所说数学“已有了高度发展”的“当时”，很可能是指春秋战国时期，或者就是指《易传》成书的战国时期。这样一来，给人的印象是揲算属于战国，最多属于春秋时期的事物。在将揲算拆解为简单数算的情况下，其数学内涵明显地超不过商代的数学水平，再与后出的数学成果（比如开方术等）做比较，自然就不值一提了。虽

然邹先生已注意到不能用《易传》的成书时代来作为揲算定型的时代，并指出："即使'系辞'晚出，从考古发现的数字卦看，（揲算）仍可能代表早先的方法。"[14] 但这里所说的"早先"，早到何时，并无进一步的讨论，结果邹先生还是将揲算放在春秋战国时期。在将程序化的揲算算法视为一种"操作法"，并按操作环节进行拆解之后，揲算便成了春秋战国时期"一个四则运算的例子"。

通过本书 4.3.3、6.1.2 和 8.2.1 等章节的相关讨论，大体上可以将揲算认定为定型于西周时期的一种没有数学瑕疵的程序化的计算方法。由于在目前所掌握的商周时期的数学成果中，还没有发现有着专门用途的程序化算法设计的其他例证，因此，还可以将揲算界定为迄今已知中国最为古老的一种程序化的专用算法，是中国西周时期的一项实用型的数学成果。这样，本书便将程序化的实用算法设计的出现时期明确地提早到了西周时期，距今已有近 2800 年的历史。在中国古代数学史的研究中，这无疑是一个很有意义的成果。

8.3 《周易》揲算的数学特点

在数学上，揲算有三条值得注意的特点。

8.3.1 数学思想主要表现为程序化的实用算法设计，没有理论思辨

商代的数学思想主要表现为实用数算，其范围不超出十万以内正整数的四则运算。九九乘法口诀，勾三股四弦五的特例及其在测量放线等方面的应用都是了不起的数学成就，但却不是程序化的算法设计。在已有的商代数学材料中，尚未发现具有程序化算法设计特征的例证。揲算以实例的形式表明西周时

期出现了程序化算法设计的数学思想，是商代数学的一种值得重视的发展。虽然揲算还只是一种特殊的专用算法，远未发展到一般性算法的程度，也看不出采用了理论思辨的痕迹，但已是西周数学取得的一大进步。揲算是一套专门用于占筮的实用算法，这套算法完全是为了满足占筮的需要而发明出来的，可能由于于占筮之外几乎找不到其他具体的用处，因而在生产实践中并不存在寻求关于揲算的一般性算法的动因，也没有从中引申出某种数学理论的需求。

按理说，程序化算法的出现适应了社会生活内容更新发展的需求，更是生产和技术发展的需求，有些遗憾的是至今还没有发现西周时期直接与生产发展有关的程序化的算法例证。但是揲算（包含早期的揲算方法）的存在使我们有理由相信，西周数学家们已有能力和条件进行实用算法的创制，因而在《周礼》“九数”的内容中已有了多种实用的计算方法，可以用来解决当时社会生活中的一些相关问题，并因此成为西周贵族子弟们的必修学科。

8.3.2 数学方法以经验归纳为主，缺乏演绎论证

揲算是以经验归纳为主通过多次试算和反复摸索，最终找出的专用算法。揲算本身的确是严密无瑕万无一失的，但它并不是依据严格的理论推导形成的算法，在揲算中也看不到明显的演绎论证环节。可以认为，揲算不是通过演绎论证的途径得到的。占筮家们在摸索的过程中必然会注意计算环节之间的承续关系和算法内部的逻辑结构，还可以用全举法考察各种具体算法的数学可行性，显示出经验归纳是完善算法规则的可行途径，也是数学发展的一种重要方式。针对具体算法列举出所有可能出现的情形，除能证明这种算法是否正确和可行之外，往往

还是建立这种算法的辅助手段。说明在缺少演绎论证的情况下，也有可能创制出某些正确的算法。在演绎论证的数学思想尚未出现的古代，用经验归纳的方法和全举论证的手段解决数学问题是很自然的事情。

另一方面，算法一经认定，筮者关心的便不再是数学思考，而是熟练使用相关的算法程序，可以知其然而不知其所以然地加以应用，求出用于占筮的卦象。更由于占筮的本意乃是通神，神秘色彩极浓而数学知识含量偏低的易数便附会而生。在这种背景下，指望从揲算中产生出演绎论证类型的数学思想或方法显然是困难而不切实际的。

8.3.3 计算手段具有依赖于筹策算具的操作型特点

古代占筮家们正是利用筹策在“分二”时具有的随机性，发明了这种可用来沟通神祇的预测方法，使算得的结果代表着天地神明的旨意。显然，离开蓍草筹策，便谈不上占筮和揲算，可见揲算是一种非常典型的操作型算法。不用说，这也是一种与古代数学发展水平相适配的计算手段。当然，蓍草筹策既然可以用来通神，对筹策类的计算工具在数算上的使用便有着促进的作用，使这类算具在实用计算中得到了广泛的发展和应用，最终成为中国传统数学中解决数学问题的基本工具。

卦象是揲算结果符号化的产物，但揲算本身并无将算法过程符号化的要求，而且起卦时，筮者按既定程序用双手操控筹策完成计算，每次筮算只对最后结果进行记录，既不保存计算过程，也不必对计算过程进行分析讨论。这些都与使用数学符号的笔算方式有着明显的区别。就揲算而言，算法与算具的配合是相当成功的。从商周到宋元时期的古代数学家们使用筹策算具也曾取得过辉煌的数学成就，不过，从发展的角度看，依靠这

种类型的算具解决数学问题或进行数学研究到底能走多远，则是一个数学史研究中已被论及的问题。[15]在中国传统数学中，筹算有着自身难于克服的弱点已为学界所认识，筹算之被淘汰，势不可免。

8.4 相关评价

8.4.1 揲算与传统数学

上节归纳总结的揲算所具有的数学特点恰与中国传统数学的基本特征相容。观察中国传统数学，自秦汉至明清，其主要的形态特点正是具有算法化倾向、缺乏演绎论证和使用筹策或算盘等手动操作类型的计算工具，从而揭示出中国传统数学与古老的揲算之间，有着密切的关联，中国的传统数学可谓渊源久远。

春秋战国时期，诸子立说，百家争鸣，数学思想也有发展。例如墨名两家的一些思考已涉及无限的概念，出现了与点、线、面、体有关的几何观念和量度认识，产生了关于矛盾律、排中律等方面的逻辑思辨。不过，以演绎论证为特征的数学思想虽见端倪，但在以实用算法的创制为主的环境中，并没有得到进一步的发展，更没有成为数学思维的主流内容。

秦汉时期，从《周髀算经》和《九章算术》，以及《算数书》等古代算书的内容来看，数学知识仍以实用算法的创制为主，所发明的各种算法多为经验归纳的结果，即使涉及逻辑推演，也难做具体考定。而且，在各种算法中，一题一法的现象是很普遍的，显示出各种算法设计具有专用的特征。魏晋数学家刘徽为《九章算术》作注（成书于公元263年），在追寻古代算法的同时，发展出割圆术和阳马术等新的数学方法和思想。“刘徽时代与春

秋战国有一个共同点，就是专制统治的削弱和思想的解放，墨家和名家的名辩思想也在这一时期得到复兴。"[16]但汉晋数学仍然是在《九章算术》等古代算经的框架下求发展，相关的工作仍以获得实用算法为主要目的，并没有形成以逻辑论证和演绎推理为特征的理论化的数学体系。

可能在汉唐时期，一些中国传统算法陆续传入西域及阿拉伯国家，此后又传入地中海地区和欧洲。例如斐波那契（L. Fibonacci，约 1170～1250 年，意大利数学家，早年曾师从阿拉伯人学习数学）作于公元 1202 年的名著《算经》中，就载有盈不足术和百鸡问题等源自中国的内容。当时阿拉伯人已掌握了不少古希腊及中国和印度的数学知识，这些数学知识为欧洲文艺复兴时期近代数学的产生打下了基础。然而，通过阿拉伯国家传入中国的西方数学知识却鲜见记载。这种单边的交流对中国古代数学的演进和发展显然是不利的。

宋元时期，秦九韶（公元 1202～1261 年，南宋数学家）作《数书九章》（成书于公元 1247 年）。李冶（公元 1192～1279 年，南宋数学家）在《测圆海镜》（成书于公元 1248 年）和《益古演段》（成书于公元 1259 年）中提出了"天元术"。朱世杰（公元 13～14 世纪，元代数学家）作《四元玉鉴》（成书于公元 1303 年），发展出"四元术"。他们的工作取得了不少重要成果，使借助于筹策算具建立程序化算法规则以解决实用问题为主要目的的传统数学发展到了巅峰状态。元末以后，中国传统数学逐渐衰微，除了珠算有所发展之外，基本上再无重要建树，甚至宋元数学中的一些内容已无人能识，传统数学处于退步境地。

明清时期，古希腊的演绎几何和西方数学家们发展形成的符号代数等数学知识传入渐多，但大都遭到专制体制和守旧文人的顽强抵抗，不能得到广泛的传播和应用。直至清末民初，专

制统治被再次削弱，随着民主意识与科学思想的逐步被接受，这种抵抗才彻底失败。从此，中国数学家们逐渐加入到现代数学研究的行列之中，并做出了自己的贡献。

中国传统数学不可避免地被现代数学所取代，除了社会及政治因素之外，还与其自身在思想、方法和工具方面存在着一定的局限性关系极大，同时也是新一代数学家们通过广泛的交流与学习，融会了中外科学思想和先进方法的必然结果。李文林先生在《数学史概论》一书中就指出：

> 中国传统数学自元末以后逐渐衰微的原因是多方面的。皇朝更迭的漫长的封建社会，在晚期表现出日趋严重的停滞性与腐朽性，数学发展缺乏社会动力和思想刺激。元代以后，科举考试制度中的《明算科》完全废除，惟以八股取士，数学家社会地位低下，研究数学者没有出路，自由探讨受到束缚甚至遭禁锢。同时，中国传统数学本身也存在着弱点。筹算系统使用的十进位置记数制是对世界文明的一大贡献，但筹算本身却有很大的局限性。在筹算框架内发展起来的半符号代数"天元术"与"四元术"，就不能突破筹算的限制演进为彻底的符号代数。筹式方程运算不仅笨拙累赘，而且对有五个以上未知量的方程组无能为力。另一方面，算法创造是数学进步的必要因素，但缺乏演绎论证的算法倾向与缺乏算法创造的演绎倾向同样难以升华为现代数学。而无论是笔算数学还是演绎几何，在中国的传播都由"天朝帝国"的妄大、自守而显得困难和缓慢。16、17世纪，当近代数学在欧洲蓬勃兴起以后，中国数学就更明显地落后了。[17]

在上述三条数学特点的层面上，认为揲算(包含早期揲算)是中国传统数学的滥觞，似乎有一定的道理。无论如何，《周易》、揲算和易数对中国传统数学的影响的确是存在的，但从不同的角度却可能做出不同的评价。例如乐爱国先生在《周易对中国古代数学的影响》一文中认为：

> 分析中国古代数学史上重要的数学著作可以看出，《周易》往往被古代数学家们视做数学发展最早的源头，而且在一些主要的数学著作中，数学家们运用《周易》中的有关概念表述数学问题，对《周易》中数学问题及其相关问题进行深入的研究，取得了重要的数学成就。这一切足以表明《周易》对古代数学发展具有非常重要的影响。[18]

而李申先生在朱伯崑先生主编的《周易知识通览・易学与数学》中，则有截然相反的结论，他认为：

> 在中国古代，数学本来就被当做小道末技。而在数学内部，又把易数，通神明放在首位。真正的数学，只能在这双重压迫下艰难前进。纵观中国数学史，从《九章算术》的四则、乘方开方、勾股、比例等数学方法，到刘徽割圆术，祖冲之圆周率，秦九韶高次方程数值解法、天元术、程大位《算法统宗》所载完整的珠算法，加上其他较小一点的数学发现，可说没有一样是在《周易》和易数的影响、推动下做出的。相反，易数和数学的结合，总是成为数学发展的桎梏和绳索。[19]

如此看来，《周易》之于中国传统数学是毁誉参半，既功莫大焉，又罪莫大焉。不过，怎样才算是全面认识《周易》、揲算和易数对中国传统数学的影响，在中国古代数学史的研究中，应当

是一个可以探讨的内容。

8.4.2 关于全举法

本文所说的全举法，是指列举出关于某个数学命题的全部可能出现的情形，然后归纳得出相应结论的论证方法。往往由于命题的设定在先，此时全举法事实上是一种验证性的方法。显然，只有在能够列举出全部可能出现情形的条件下，才能使用这种方法，因而全举法具有很大的局限性，比较适合于某些特殊命题的验证。在现代数学中，全举法表现为具体的枚举，由于并非演绎推理，因而一般不做专门的介绍，但在以计数为主的古代，用全举的方法论证某些命题的可能的例证则并不少见。例如前面提到的八卦和六十四卦的演成，便极有可能是按既定规则依循全举思路得到的结果。或者说，八卦和六十四卦本身就是两个得到了全举验证的特殊真命题。

在揲算中使用全举法的目的是检查这种算法的数学可行性，其应用是相当成功的。将全举法用于揲算命题的论证，虽然首见于唐初学者孔颖达对《易传·系辞上》所作疏文的记载，但笔者估计孔氏所录并不是当时的新发现，他极有可能只是对易学传人手传口授的西周占筮家们的古老做法做了整理和记录。当然，正是这一宝贵记录为我们研究揲算提供了重要的材料。笔者做出这一估计的理由有三：

1. 在揲算的定型过程中，西周占筮家们肯定接触过多种具体的算法，对于各种算法方案的数学可行性，有可能产生加以判断的想法，存在寻求数学验证方法的动因。由于这些用于占筮的算法方案既非演绎推证的结果，西周占筮家们也不具备足够的演绎推证能力，他们便只能从验证的角度依循全举的思路展开论证。

2. 由于参揲策数有限，所有可能在揲算过程中出现情形的数量不多，构成也不复杂，能够满足实施全举论证的基本条件。而且论证过程中涉及的数学运算，不超过 50 以内正整数的加减法，在缺乏演绎论证的条件下，只要思路清晰，将筹策依序摆出所有可能出现的情形，即可归纳得出这种算法是否可行的结论。所以西周时期的占筮家们对包含揲算在内的多种算法做全举论证在操作上是可行的。揲算本身具有精准无瑕的数学结构的事实，似乎也足以证明西周占筮家们对它进行过严格的全举核验。

3. 西周占筮家们对全举思路其实并不陌生，他们将这一思路发展为一种论证方法似在情理之中。考查原始的占筮，不难发现存在着萌生类似思考的条件或可能性。原始占筮中很可能使用过直接依据得数的奇偶判断吉凶的简单占法，筮者必然明白所得之数非奇即偶，全部情形仅此两种，占筮时二者必居其一，再无第三种结果，便显示出最简单的全举意识。其他如八卦和六十四卦，以及长期流传于四川凉山彝族的“雷夫孜”占法[20]（数学上等价于八卦的构成），还有与占筮无关的甲子干支排序和九九乘法口诀的编定等，似乎都可视为全举意识的产物。全举意识或全举思路以其浅显直观的优点，出现于人类早期的数学思维之中，应是很自然的事情。

这样看来，孔颖达关于全举论证的记载，确有可能源于西周，并非唐代才出现的做法。西周占筮家们将全举意识用于各种算法方案的数学可行性验证是非常有可能的，他们的这种思路和做法事实上已构成了关于此类命题的一种论证方法，应视为数学论证方法的一种创新。全举法的出现标志着西周时期数学思维和论证方法的进步，对后来中国传统数学中算法化倾向的形成有一定的影响。可以说，全举法是中国古代数学史中值得注意的课题。

附带指出，本书所谓的全举法与数学中习用的穷举法或穷竭法是有差异的。穷举法更近于反证法，而穷竭法则接近于极限方法，但考虑的只是有限项。沈康身先生在《历史数学名题赏析》一书中的“穷竭法、穷举法与极限”一节中对这两种方法有所说明。[21]古希腊数学家欧几里德（Euclid，公元前 330 ~ 前 275）所作《几何原本》第十卷的命题Ⅹ·1 给出了穷竭法的数学基础，并在Ⅻ·2 和Ⅻ·5 等多个命题中用于与面积或体积相关的证明。[22]魏晋布衣数学家刘徽在注《九章算术·商功》论及阳马术时所说“半之弥少，其余弥细”，是中国传统数学中使用穷竭法的典型代表。相比之下，全举法显得极其浅近而古朴，因而极有可能在中国传统数学的算法创制（即所谓“造术”）中有着更为古老而广泛的应用。

8.4.3 揲算与卜筮文化

从卜筮文化的角度看，一般认为商代盛行龟卜，占筮则是比较次要的预测方法。西周时期，随着筮算方法的改进和规范化经文的形成，占筮逐渐受到王室贵族的崇奉与重视。春秋战国时期，由于周室王权的衰微，以龟卜和《周易》为主的卜筮方法已摆脱了王室的控制而广泛流行于各诸侯国的宫廷和民间，龟卜虽仍有很大的影响，但呈相对减缩的态势。相比之下，占筮的应用则有明显的扩张。刘瑛先生在《左传、国语方术研究》一书中就指出：

> 春秋前期有筮短龟长之说，可见占卜的地位很重要，但与此同时占筮的地位不断上升。因《周易》逐渐义理化，最终取代了其他占书成为惟一的标准占书，这也是春秋数术史上比较突出的现象。[23]

应当说，除了义理化因素之外，春秋时期显示出的占筮地位不断上升的现象还与技术性原因有关，主要表现为筮算方法和经文及卦象的配置已臻于完善，从而使《易》占的义理化进程有了稳定的载体依托。其中，占筮技术的发展与数学能力的进步有着密不可分的关系。到了汉晋时期，占筮方法基本统一于《周易》，而《连山》、《归藏》等不同占法逐渐被淘汰，龟卜的使用则更渐减少。从此，《周易》占筮便成为中国卜筮文化的主角。这种情况反映了商周时期人们探求神意以预测未来的卜筮途径，发生了逐渐由依据甲骨灼裂兆示的占卜，向崇信数理通神的占筮的转变。虽然这种转变只是由对甲骨拆裂现象的神秘崇拜逐渐过渡为对数和算法的神秘崇拜，仍属神秘文化的范畴，但却体现了卜筮文化的演化状态，或者说，体现了商周时期知识结构的一种进步。可以肯定，数学知识的发展和应用对卜筮文化的演进起到了至关重要的推动作用。另一方面，这种知识结构的进步，还参与奠定了春秋战国时期形成百家争鸣局面的基础。在对中国传统文化的相关研究中，这也许是一个可以探讨的内容。

注释：

[1] 李俨：《中国古代数学史料》，中国科学图书仪器公司 1954 年版，第 3～5 页。

[2] 徐凤先：《帝乙祀谱、帝乙在位年与商末岁首》，《自然科学史研究》2004(3)，第 190、191 页。

[3] 吴文俊：《中国数学史大系·第一卷》，北京师范大学出版社 1998 年 9 月版，第 168～192 页。

[4] 张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简》，文物出版社 2006 年 5 月版，第 129～157 页。

[5] 邹大海：《中国数学的兴起与先秦数学》，河北科学技术出版社

2001年9月版,第82页。
[6]钱宝琮:《中国数学史》,科学出版社1964年11月版,第3、14页。
[7]严敦杰:《关于西汉初期的式盘和占盘》,《考古》1978(5),第334~337页。殷涤非:《西汉汝阴侯墓出土的占盘和天文仪器》,《考古》1978(5),第338~343页。
[8]吴文俊:《中国数学史大系·第一卷》,北京师范大学出版社1998年9月版,第193~210页。
[9]段耀勇:《先秦数学史研究的新进展》,《自然科学史研究》2004(2),第168~172页。
[10]邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》,河北科技出版社2001年9月版,第72、82、103、104、171、172、177页。
[11]李零:《中国方术续考》,东方出版社2001年8月第2版,第305页。
[12]朱伯崑:《周易知识通览》,齐鲁书社1993年12月版,第741页。
[13]邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》,河北科技出版社2001年9月版,第110、111页。
[14]邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》,河北科技出版社2001年9月版,第110页。
[15]李文林:《数学史概论》,高等教育出版社2002年8月版,第104页。
[16]邹大海:《中国数学的兴起与先秦数学》,河北科技出版社2001年9月版,第501页。
[17]李文林:《数学史概论》,高等教育出版社2002年8月版,第104页。
[18]乐爱国:《周易对中国古代数学的影响》,《周易研究》2003(3),第76~78页。
[19]朱伯崑:《周易知识通览》,齐鲁书社1993年12月版,第746页。
[20]汪宁生:《八卦起源》,《考古》1976(4),第243页:

与古代筮法最相似的还要算四川凉山彝族的占卜方法,故有必要详做介绍。此法名为"雷夫孜",其具体情况是这样的:"毕摩"(彝族巫师)取细竹或草秆一束握于左手,右手随便分去一部分,看左手所余之数是奇是偶。如此共行三次,即可得三个数字。有时亦可不用细竹或草秆,而用一根木片,以小刀在上随

便划上许多刻痕，再将木片分为三个相等部分，看每一部分刻痕共有多少，亦可得出三个数字。然后“毕摩”根据这三个数是奇是偶及其先后排列，判断“打冤家”（过去彝族奴隶主操纵下的一种械斗）、出行、婚丧等事。

由于数分两种而卜必三次，故有八种可能的排列和组合，即共有八种答案。关于这八种排列组合情况，何者为吉，何者为凶，是因事而异的，而且各个地区或家支解释亦有所不同。随着宗教迷信的破除，现在会做具体解释的人已不多，1960年我们在凉山调查时想做详细了解即很困难。然解放以前有人曾记录一套卜问“打冤家”的解释方法（原注：徐益棠等：《打冤家——罗罗氏族间之战争》，《边政公论》第1卷第7～8期，81～82页）兹摘录于下，以见一斑：

偶偶偶——不分胜负（中平）。

奇奇奇——非胜即败，胜则大胜，败则大败（中平）。

偶奇奇——战斗不大顺利（下）。

奇偶偶——战必败，损失大（下下）。

偶奇偶——战斗无大不利（中平）。

偶偶奇——战斗有胜的希望（上）。

奇奇偶——战斗与否，无甚影响（平）。

奇偶奇——战必胜，掳获必多（上上）。

每当“打冤家”之前，常要以“雷夫孜”法决定行动。如遇上卦，当然要打。如遇中卦或下卦，则要考虑打不打的问题了。

[21]沈康身：《历代数学名题赏析》，上海教育出版社2002年9月版，第1138～1141页。

[22]（古希腊）欧几里德：《几何原本》，燕晓东编译，人民日报出版社2005年10月版，第361～363页、第557～565页。

[23] 刘瑛：《左传、国语方术研究》，人民文学出版社，2006年6月版，第196页。